ORSAY
SERIE A
N° d'ordre 1149

T H E S E S

présentées

A L'UNIVERSITE de PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

RAUCH Gérard

1ère THESE : VARIATIONS D'ALGEBRES DE LIE.

2ème THESE : PROPOSITIONS DONNEES.

Soutenues le 21 JUIN 1973 devant la Commission d'Examen

MM. LESIEUR ..... Président

DEMAZURE ....}
MEYER .....} Examinateurs
KOSZUL .....}

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552722_0021

ORSAY
SERIE A
N° d'ordre 1149

T H E S E S

présentées

A L'UNIVERSITE de PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

RAUCH Gérard

1ère THESE : VARIATIONS D'ALGEBRES DE LIE.

2ème THESE : PROPOSITIONS DONNEES.

Soutenues le 21 JUIN 1973 devant la Commission d'Examen

MM. LESIEUR ..... Président

DEMAZURE ....
MEYER ..... } Examinateurs
KOSZUL .....

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

In view of the complicated nature of the expressions which will need to be manipulated in dealing with deformation problems, it becomes clear that a formidable amount of computation lies ahead unless we can find a systematic method for handling such expressions. The following will serve our purposes.

A. Nijenhuis and R.W. Richardson

Journ. of Math. and Mech. (1967).

Anne-Marie je te dédie ces pages.

SOMMAIRE

Introduction. 01

CHAPITRE 1. - Sur les trois-classes de cohomologie effaçables.

1. Rappel d'une description fonctorielle de $H^2(L,)$. 1
2. Sur l'effacement des classes de cohomologie. 4
3. Propriétés fonctorielles des liens. 6
4. Une description fonctorielle de $H_e^3(L,)$. 15
5. Sur les liens réalisables. 18

CHAPITRE 2. - Relèvement de lois d'algèbres de Lie, de morphismes.

1. Cas des algèbres de Lie. 22
2. Cas des morphismes. 26

CHAPITRE 3. - Variation d'algèbres et de morphismes.

1. Notations. 31
2. Le schéma des algèbres de Lie. 34
3. Les sous-schémas des algèbres de Lie nilpotentes et résolubles. 39
4. Le schéma des algèbres de Lie et des morphismes. 45

CHAPITRE 4. - Applications.

1. Sur l'idéal des relations de Jacobi. 48
2. Sur le groupe de Poincaré. 53

Bibliographie. 60

-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION

Ce mémoire propose un formalisme pour l'étude de la variété $\mathcal{L}_n$ des algèbres de Lie de dimension finie n, sur un corps de caractéristique zéro. Les variations d'algèbres de Lie ont déjà fait l'objet de nombreux travaux. L'une des principales difficultés est la maitrise de la complexité des équations liées aux déformations. L'introduction par Nijenhuis et Richardson d'algèbres de Lie graduées permet d'obtenir assez aisément les critères cohomologiques usuels donnant des conditions suffisantes pour qu'une algèbre de Lie soit rigide (c'est-à-dire pour que son orbite sous l'action du groupe linéaire soit une sous-variété ouverte de $\mathcal{L}_n$) ou pour qu'un point L de $\mathcal{L}_n$ soit régulier. Ces méthodes s'adaptent aussi à l'étude d'autres types de variétés d'algèbres (variété d'algèbres associatives, commutatives) et donnent des résultats semblables. L'outil que nous présentons ici s'applique aux algèbres de Lie de dimension finie sur un corps de caractéristique zéro. Il permet, et c'est le résultat le plus important de ce travail, de montrer que les obstructions aux déformations d'une algèbre de Lie L, déjà interprétées dans le troisième groupe de cohomologie $H^3(L,L)$, sont de fait dans le sous-groupe $H^3_e(L,L)$ des classes effaçables. Il s'ensuit un critère de lissité plus fin que le traditionnel $H^3(L,L) = 0$, à savoir $H^3_e(L,L) = 0$.

La notion de lien, auquel est consacré le premier chapitre, conduit à une description du sous-groupe des classes effaçables du troisième groupe de cohomologie d'une algèbre de Lie L à valeurs dans un L-module V de dimension finie, fonctorielle en V. Les travaux de Hochschild sur les noyaux [7] (un noyau est la donnée d'un morphisme d'algèbres de Lie $\varphi: L \to \mathrm{Der}\, P/\mathrm{Int}\, P$ où L et P sont des algèbres de Lie de dimension finie), introduits par Mori [14] dans le but de trouver une interprétation du troisième groupe de cohomologie d'une algèbre de

Lie L comparable à celle obtenue dans le cas des groupes, ont révélé une description du sous-groupe des classes effaçables. Mais la nécessité de considérer tout le centre V de P empêche les propriétés de fonctorialité par rapport à V . La notion de lien fait la synthèse entre les noyaux de Mori ($\varphi: L \to \mathrm{Der}\ P/\mathrm{Int}\ P$) et les suites exactes d'algèbres de Lie à quatre termes

$$0 \to V \to P \to M \to L \to 0 ,$$

où V est central dans P (mais pas nécessairement égal au centre de P) avec certaines conditions de cohérence. L'ensemble quotient de ces objets par une bonne relation d'équivalence conduit à la description annoncée. L'essentiel de la démonstration repose, d'une part sur la caractérisation des classes effaçables de $H^3(L,V)$ à partir des sous-algèbres semi-simples maximales de L , d'autre part sur l'interprétation du foncteur $H^3_e(L,)$ comme satellite, dans la catégorie des L-modules de dimension finie, du foncteur $H^2(L,)$.

La recherche d'une déformation à une loi d'algèbre de Lie conduit naturellement à considérer des liens. De même les liens réalisables, introduits dans le premier chapitre pour définir la relation d'équivalence sur les liens, se rencontrent avec des problèmes de variation de morphisme d'algèbres de Lie. Il en résulte une condition nécessaire et suffisante pour qu'une loi d'algèbre de Lie, ou qu'un morphisme d'algèbres de Lie, se relève. Ces développements constituent le deuxième chapitre.

L'étude de la variété des algèbres de Lie en tant que schéma algébrique est faite au chapitre trois. L'espace tangent de Zariski et le cône des tangentes en un point sont introduits avec le langage actuel de la géométrie algébrique afin de démystifier complètement les algèbres de Lie L à orbite ouverte et pour lesquelles le deuxième groupe de cohomologie $H^2(L,L)$ n'est pas nul (la nullité de ce groupe implique non seulement que l'orbite de l'algèbre est ouverte mais que, de plus, en chaque point de l'orbite le schéma $\mathcal{L}_n$ est lisse). Le

nouveau critère de lissité $(H_e^3(L,L) = 0)$ est alors une conséquence immédiate des constructions et des résultats du chapitre deux. Le sous-schéma fermé de $\mathcal{L}_n$, des algèbres de Lie résolubles, est introduit à partir de la propriété caractéristique des algèbres de Lie résolubles (idéal dérivé nilpotent). Cela permet, comme M. Vergne l'a montré pour le schéma des algèbres de Lie nilpotentes, une caractérisation de l'espace tangent de Zariski par une bonne filtration de la cohomologie de l'algèbre. Le chapitre se termine par un critère de lissité en un point de la variété des algèbres de Lie et des morphismes.

Le chapitre quatre est réservé aux exemples. L'étude des extensions L, de $sl(2)$ à noyau commutatif et irréductible pour la structure de $sl(2)$-module induite, conduit à des algèbres de Lie à orbite ouverte de deux types. Un premier type pour lequel $H^2(L,L) = 0$ et un deuxième type pour lequel $H^2(L,L) \neq 0$. Pour démontrer que les algèbres de Lie du second type sont ouvertes nous établissons que les variations du premier ordre non triviales ont une obstruction non nulle dans $H_e^3(L,L)$. Il en découle une réponse négative à un problème posé par Dixmier : "L'idéal des relations de Jacobi est-il réduit ?" L'ouverture des orbites des algèbres de Lie du second type a été établie indépendamment par Richardson [21]. Sa méthode, s'appuyant sur des résultats de Kostant, montre qu'il n'y a pas d'algèbres de Lie non isomorphe à L qui puisse se spécialiser en L. Le deuxième exemple étudié est un complément au problème des variations du groupe de Poincaré étudié dans [19]. La facilité avec laquelle nous avons pu relever la représentation naturelle de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré provient de la lissité de la variété des algèbres de Lie et des morphismes au point correspondant. Le critère de lissité du chapitre trois est en effet satisfait. Tous les calculs de groupes de cohomologie que nous exposons sont grandement

simplifiés par l'utilisation de la suite spectrale de Hochschild-Serre.

Les principaux résultats de cet article ont été annoncés dans deux notes aux comptes rendus de l'Académie des Sciences (1968,1969) et dans deux articles (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1971, Annales de l'Institut Fourier, 1972).

Maintenant, puisque la coutume m'y autorise, je tiens à remercier ici tous ceux qui, d'une façon ou d'une autre, ont contribué à l'élaboration de ce travail. Il me faut citer

Le département de Mathématique dans son ensemble, qui m'a donné des conditions idéales de travail ;

Monsieur Lesieur, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury de cette thèse et qui m'a permis, dans son service, de trouver un juste équilibre entre l'enseignement et la recherche ;

Monsieur Koszul, qui m'a recruté comme assistant à Strasbourg et dont l'invitation à venir exposer à Grenoble des travaux encore mal dégrossis m'a été d'un grand encouragement ; je le remercie aussi d'avoir accepté de faire partie du Jury de cette thèse ;

Yves Meyer, qui a bien voulu me proposer un sujet de seconde thèse et qui, à Strasbourg, fut un des premiers à m'encourager dans la persévérance ;

Enfin, et surtout, Michel Demazure, qui m'a appris à faire des mathématiques, qui a toujours et à tout moment su trouver un instant pour réfléchir à une question et sans qui ce travail ne serait pas.

Que Madame Le Marec à qui on doit la frappe de ce manuscrit trouve ici l'expression de mes remerciements.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

CHAPITRE 1.

SUR LES TROIS CLASSES DE COHOMOLOGIE EFFACABLES

Soit L une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps k de caractéristique zéro. On désigne par $\mathcal{V}$ la catégorie des L-modules de dimension finie, par $\mathcal{V}(V,W)$, $V,W \in ob(\mathcal{V})$, l'ensemble des flèches $V \to W$ et par $H^n(L,)$ le foncteur, de $\mathcal{V}$ dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie, qui à tout objet $V \in ob(\mathcal{V})$ associe l'espace $H^n(L,V)$ des n-classes de cohomologie de L à valeurs dans V. Si f appartient à $\mathcal{V}(V,W)$, $H^n(L,f)$ désigne la flèche induite.

1. RAPPEL D'UNE DESCRIPTION FONCTORIELLE DE $H^2(L,)$.

Soit V un objet de $\mathcal{V}$. On note $\mathcal{E}xt(L,V)$ la catégorie dont les objets sont les extensions d'algèbres de Lie

$$E: 0 \to V \to A \to L \to 0$$

de L à noyau commutatif V, où l'opération induite de L sur V est l'opération donnée. Si E_1 et E_2 sont deux objets de $\mathcal{E}xt(L,V)$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(E_1,E_2)$ des flèches de E_1 dans E_2 est l'ensemble des diagrammes commutatifs d'algèbre de Lie

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1: 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{j_1} & A_1 & \xrightarrow{\pi_1} & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ E_2: 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{j_2} & A_2 & \xrightarrow{\pi_2} & L & \longrightarrow & 0 \ . \end{array}$$

(Si $\mathrm{Hom}(E_1,E_2) \neq \emptyset$, la flèche $A_1 \to A_2$ est un isomorphisme).

a. Composition. Soient E_1 et E_2 deux objets de $\mathcal{E}xt(L,V)$. On leur associe un troisième, noté $E_1 * E_2$ comme dans le cas des modules sur un anneau [13, 23]. Soient

$$F: 0 \to V \times V \to A_1 \times A_2 \to L \times L \to 0$$

l'extension produit des extensions E_1 et E_2 et $\Delta: L \to L \times L$ $(l \mapsto (l,l))$ le morphisme diagonal. On définit l'image réciproque de F par Δ comme d'habitude : si A' désigne la sous-algèbre de l'algèbre produit $A_1 \times A_2$, formée des couples (a_1,a_2) tels que $\pi_1(a_2) = \pi_2(a_2)$, $j': V \times V \to A'$ l'injection $j_1 \times j_2$ et $\pi': A' \to L$ l'application $((a_1,a_2) \mapsto \pi_1(a_1) = \pi_2(a_2))$, on a le diagramme commutatif d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V \times V & \xrightarrow{j'} & A' & \xrightarrow{\pi'} & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \\ 0 & \longrightarrow & V \times V & \longrightarrow & A_1 \times A_2 & \longrightarrow & L \times L & \longrightarrow & 0 \ . \end{array}$$

Maintenant la flèche $\nabla: V \times V \to V$ $((v_1,v_2) \mapsto v_1+v_2)$ a pour noyau un idéal de A' ce qui permet de définir l'image directe de E' par le morphisme ∇. On a le diagramme commutatif d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{ccccccccc} E': 0 & \longrightarrow & V \times V & \xrightarrow{j'} & A' & \xrightarrow{\pi'} & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \nabla} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ E_1 * E_2: 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{j} & A & \xrightarrow{\pi} & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec $A = A'/\mathrm{Ker}\,\nabla$, $j(v) = \mathrm{classe}(v,o)$ et $\pi(\mathrm{classe}(a_1,a_2)) = \pi'(a_1,a_2)$.

On définit aussi le composé $f.E$ d'une flèche $f \in \mathcal{V}(V,W)$ et d'un objet E de $\mathcal{E}xt(L,V)$ (en particulier le produit d'une extension par un scalaire). Soit F l'extension inessentielle de L par W définie par l'opération de L sur W. On a :

$$F: 0 \to W \to W \times L \to L \to 0$$

où le crochet dans $W \times L$ est donné par la formule

$$[(w_1,l_1), (w_2,l_2)] = (l_1.w_2 - l_2.w_1, [l_1,l_2]),\ w_1,w_2 \in W,\ l_1,l_2 \in L\ ,$$

et où les flèches sont les flèches évidentes. Soit

$$E': 0 \to V \times W \to A' \to L \to 0$$

l'image réciproque de l'extension produit $E \times F$ par le morphisme diagonal $\Delta: L \to L \times L$. On remarque que le noyau de la flèche $f.\nabla: V \times W \to W$ $((v,w) \mapsto f(v)+w)$, est un idéal de A', ce qui permet, comme précédemment de définir l'image directe $f.E$ de l'extension E' par le morphisme $f\nabla$.

b. Classe de cohomologie associée à une extension [22]. Soient

$$E: 0 \longrightarrow V \longrightarrow A \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$$

un objet de $\mathcal{E}xt(L,V)$ et $\sigma: L \to A$ une section linéaire de π. On pose

$$\varphi(l_1,l_2) = [\sigma(l_1),\sigma(l_2)]_A - \sigma([l_1,l_2]_L,\ l_1,l_2 \in L$$

et on identifie V à un idéal de A. L'application bilinéaire alternée φ est alors un deux-cocycle de L à valeurs dans V comme on le vérifie directement. Réciproquement si φ est un élément de $Z^2(L,V)$ on lui associe un objet

$$E: 0 \to V \to V \underset{f}{\times} L \to L \to 0\ ,$$

de $\mathcal{E}xt(L,V)$, où le crochet sur l'espace vectoriel produit $V \times L$ est donné par la formule

$$[(v_1,l_1),(v_2,l_2)] = (l_1.v_2 - l_2.v_1 + \varphi(l_1,l_2),[l_1,l_2]),\ l_1,l_2 \in L,\ v_1,v_2 \in V\ ,$$

et où les flèches sont les flèches évidentes. On note $c(E)$ la classe de cohomologie associée à E. On vérifie les propriétés suivantes :

i. $c(E_1 * E_2) = c(E_1)+c(E_2), E_1,E_2 \in Ob(\mathcal{E}xt(L,V))$,

ii. $(c(E) = 0) \Longleftrightarrow$ (E est inessentiel), $E \in Ob\ (\mathcal{E}xt(L,V))$,

iii. $(c(E_1) = c(E_2)) \Longleftrightarrow (\mathrm{Hom}(E_1,E_2) \neq \emptyset)$, $E_1,E_2 \in Ob\ (\mathcal{E}xt(L,V))$,

iv. $c(f.E) = H^2(L,f)(c(E))$, $E \in Ob\ (\mathcal{E}xt(L,V))$, $f \in \mathcal{V}\ (V,W)$.

Deux extensions qui vérifient les propriétés (iii) sont dites équivalentes et on note $\mathrm{Ext}(L,V)$ l'ensemble des classes d'équivalence d'objets de $\mathcal{E}xt(L,V)$. En résumé on a le

THEOREME 1. Les lois de composition sur les extensions munissent $\mathrm{Ext}(L,V)$ d'une structure d'espace vectoriel et la correspondance qui à chaque extension associe sa deux-classe de cohomologie définit une application

$$\mathrm{Ext}(L,V) \to H^2(L,V)$$

linéaire, bijective et fonctorielle en V.

2. SUR L'EFFACEMENT DES CLASSES DE COHOMOLOGIE.

On dit qu'une classe de cohomologie $q \in H^n(L,V)$, $n \in \mathbb{N}$, $V \in Ob(\mathcal{V})$ est effaçable s'il existe un objet W de $\mathcal{V}$ et un monomorphisme $f \in \mathcal{V}(V,W)$ tels que $H^n(L,f)(q) = 0$. Il est immédiat que toute classe non nulle de degré zéro n'est pas effaçable mais que toute classe de degré un l'est. Un résultat très fin dû à Iwasawa [10] montre que toute classe de degré deux est effaçable. L'étude de l'effacement des classes de cohomologie a été poursuivie par Hockschild [7] et Koszal [12] qui ont montré que si L est résoluble toute classe de degré q, $q \geqslant s$, est effaçable. Cartier a repris leurs travaux et, par une nouvelle méthode, a donné l'énoncé suivant (cf. [2], théorème 6) qui caractérise les classes de cohomologie effaçables.

THEOREME 2. Pour qu'une classe de cohomologie soit effaçable il faut et il suffit qu'elle soit annulée par la restriction de L à une sous-algèbre semi-simple maximale.

Si $S \subset L$ est une sous-algèbre semi-simple maximale et r l'application restriction induite en cohomologie on a donc la suite exacte

$$0 \to H^n_e(L,V) \longrightarrow H^n(L,V) \xrightarrow{r} H^n(S,V), \quad n \in \mathbb{N}, \ V \in Ob(\mathcal{V}),$$

où $H^n_e(L,V)$ désigne le sous-espace des n-classes de cohomologie effaçables. On en déduit le caractère fonctoriel de $H^n_e(L,V)$, $V \in Ob(\mathcal{V})$, les égalités (dont le résultat d'Iwasawa)

$$H_e^0(L,V) = 0, \quad H_e^1(L,V) = H^1(L,V), \quad H_e^2(L,V) = H^2(L,V)$$

et si L est résoluble (résultat de Hoschschild et Koszul) (resp. semi-simple) les égalités

$$H_e^n(L,V) = H^n(L,V) \text{ (resp. } H_e^n(L,V) = 0).$$

Soit

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{i} V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

une suite exacte de $\mathcal{V}$. On en déduit la suite exacte de cohomologie

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(L,V'') \xrightarrow{\delta} H^n(L,V') \longrightarrow H^n(L,V) \longrightarrow H^n(L,V'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(L,V') \longrightarrow \ldots$$

LEMME 1. L'opérateur de cohomologie δ se factorise à travers les classes effaçables.

En effet, soit $q'' \in H^n(L,V'')$, on a $H^{n+1}(L,i) \circ \delta(q'') = 0$ et l'injection i réalise alors l'effacement de $\delta(q'')$.

La suite exacte de cohomologie donne alors la suite :

$$\ldots \to H_e^{n-1}(L,V'') \to H_e^n(L,V') \to H_e^n(L,V) \to H_e^n(L,V'') \to H_e^{n+1}(L,V') \to \ldots \qquad (2)$$

LEMME 2. La suite $H_e^n(L,V') \to H_e^n(L,V) \to H_e^n(L,V'')$ est exacte.

En effet soit $q \in H_e^n(L,V)$ tel que $H_e^n(L,p)(q) = 0$. D'après la suite exacte de cohomologie il existe $q' \in H^n(L,V')$ tel que $H^n(L,i)(q') = 0$. On voit alors que si $f \in \mathcal{V}(V,W)$ réalise l'effacement de q, $f \circ i \in \mathcal{V}(V',W)$ réalise celui de q'.

PROPOSITION 1. La suite tronquée

$$H_e^1(L,V') \to H_e^1(L,V) \to \ldots \to H_e^3(L,V'')$$

est exacte.

C'est une conséquence des deux lemmes qui précèdent, des égalités

$$H_e^1(L,W) = H^1(L,W), \quad H_e^2(L,W) = H^2(L,W), \quad W \in Ob(\mathcal{V})$$

et de la suite exacte de cohomologie.

Remarque. En général la suite (2) n'est pas exacte en $H^1(L,V)$. Par contre on a la suite exacte

$$0 \to Z^1(L,V') \to Z^1(L,V) \to Z^1(L,V'') \to H^2(L,V') \to H^2(L,V) \to H^2(L,V'')$$
$$\to H^3_e(L,V') \to H^3_e(L,V) \to H^3_e(L,V'') .$$

Comme, par tout diagramme commutatif de $\mathcal{V}$ du type

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z^1(L,V') & \longrightarrow & Z^1(L,V) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & H^3_e(L,V'') \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z^1(L,W') & \longrightarrow & Z^1(L,W) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & H^3_e(L,W'') \end{array}$$

et que par leur définition même $H^2(L,\ )$ et $H^3_e(L,\ )$ satisfont à la propriété universelle des satellites (conf. [1] proposition 4,2), ces deux foncteurs s'interprètent donc comme les deux premiers satellites, dans la catégorie $\mathcal{V}$ des L-modules de dimension finie, du foncteur $Z^1(L,\ )$. Le problème de la détermination des satellites d'ordre $n \geqslant 3$ reste ouvert. Il serait donc intéressant de savoir si la suite (2) est exacte en $H^n_e(L,V'')$, $n \geqslant 3$ et en $H^n_e(L,V')$, $n \geqslant 4$.

3. PROPRIETES FONCTORIELLES DES LIENS.

Avant d'introduire le concept de lien il faut revenir sur la notion de noyau introduite par Mori [14] dans le but d'interpréter le troisième groupe de cohomologie de L à valeurs dans V, $V \in Ob(\mathcal{V})$.

a. Noyau. Commençons par une définition.

DEFINITION 1. On appelle noyau la donnée d'un couple (P,φ) formé d'une algèbre de Lie P de k-dimension finie et d'un morphisme $\varphi: L \to \mathrm{Der}\ P/\mathrm{Int}\ P$.

Voici deux exemples qui seront utiles par la suite.

Exemple 1. Soit $0 \to P \to N \to L \to 0$ une suite exacte d'algèbres de Lie. Si s est une section de $N \to L$ (par section nous entendons section linéaire) on lui associe une application linéaire $\tilde{\varphi}: L \to \mathrm{Der}\ P$ en posant

$$\tilde{\varphi}(l)(p) = [s(l),p]_N \ , \ l \in L, \quad p \in P \ ,$$

P étant identifié à un idéal de N. On remarque alors que l'application composée φ de $\tilde{\varphi}$ et de la projection canonique $\mathrm{Der}\ P \to \mathrm{Der}\ P/\mathrm{Int}\ P$, est un morphisme d'algèbres de Lie indépendant du choix de la section s. Le couple (P,φ) est donc un noyau. Tout noyau qui peut se définir à partir d'une suite exacte d'algèbres de Lie (de dimension finie, rappelons-le) comme précédemment est dit réalisable.

Exemple 2. Soit V un objet de $\mathcal{V}$. On lui associe un noyau (V) en prenant pour algèbre de Lie V muni de la structure abélienne et pour morphisme l'opération de L sur V.

Soit (P,φ) un noyau. Le centre C de P est muni d'une structure de L-module induite par le noyau de la façon suivante. On choisit un relèvement $\tilde{\varphi}: L \to \mathrm{Der}\ P$ de φ (par relèvement nous entendons relèvement linéaire) et on pose

$$l.v = \tilde{\varphi}(l)(v), \ l \in L, \ v \in C \ .$$

On vérifie que l'on a bien une opération de L sur C qui ne dépend pas du choix de $\tilde{\varphi}$. Dans le cas particulier de l'exemple 2 l'opération induite coïncide avec l'opération donnée. Soit maintenant I un idéal caractéristique de P ou un L-sous-module de C. Il est immédiat que la notion de noyau passe au quotient par I et définit un noyau $(P/I, \varphi_I)$.

PROPOSITION 2. Le noyau quotient $(P/C, \varphi_C)$ est réalisable.

En effet choisissons un relèvement $\tilde{\varphi}: L \to \mathrm{Der}\ P$ de φ, une application $\theta \in \mathrm{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda} L, P/C)$ et une section $\sigma: P/C \to P$ de la projection canonique tels que l'on ait :

$$[\tilde{\varphi}(l), \tilde{\varphi}(l')] - \tilde{\varphi}([l,l']) = \mathrm{Int}_P \sigma \circ \theta(l,l'), \quad l,l' \in L .$$

L'extension M cherchée a alors pour espace vectoriel sous-jacent le produit $P/C \times L$ et son crochet est donné par la formule

$$[(r,l),(r',l')]_M = ([r,r']_{P/C} + \tilde{\varphi}_C(l)(r') - \tilde{\varphi}_C(l')(r) + \theta(l,l'), [l,l']_L),$$

$r,r' \in P/C$, $l,l' \in L$, $\tilde{\varphi}_C$ déduit de $\tilde{\varphi}$ par passage au quotient.

Il suffit de vérifier que la condition de Jacobi est satisfaite.

b. Liens.

DEFINITION 2. On appelle lien la donnée d'un noyau (P,φ) et d'une suite exacte d'algèbres de Lie.

$$0 \to V \xrightarrow{j} P \to M \to L \to 0$$

où V est un objet de $\mathcal{V}$ muni de la structure d'algèbre de Lie commutative, où j est un monomorphisme de $\mathcal{V}(V, \mathrm{Cent}\ P)$ (le centre de P est muni de la structure de L-module induite par le noyau (P,φ) et où l'extension

$$0 \to R \to M \to L \to 0 , \quad R = P/j(V) ,$$

induit le noyau quotient $(P/j(V), \varphi_{j(V)})$ de la façon suivante : il existe une section s de $M \to L$ et un relèvement $\tilde{\varphi}: L \to \mathrm{Der}\ P$ de φ tels que si on pose

$$\theta(l,l') = [s(l), s(l')]_M - s([l,l']_L), \quad l,l' \in L ,$$

on ait :

(i) $\varphi_{j(V)}(l)(r) = [s(l),r]_M$, $l \in L$, $r \in R$

(ii) $[\tilde{\varphi}(l), \tilde{\varphi}(l')] = \tilde{\varphi}([l,l']_L) = \mathrm{Int}_P \sigma \circ \theta(l,l')$, $l,l' \in L$,

σ section de $P \to R$.

Puisque $j(V) \subset \text{Cent } P$ la condition (ii) ne dépend pas du choix de la section σ. La notion d'isomorphisme de liens s'introduit de façon naturelle. Deux liens Λ_1 et Λ_2 de composantes $(V, P_i, \varphi_i, j_i, M_i)$, $i = 1,2$ respectivement sont dits isomorphes (notation $\Lambda_1 \tilde{=} \Lambda_2$) s'il existe deux isomorphismes d'algèbres de Lie $\tau : P_1 \to P_2$ et $\rho : M_1 \to M_2$ tels que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\tau} & P_2 \\ & {\scriptstyle j_1}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle j_2} & \\ & V & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1/j_1(V) & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & P_2/j_2(V) & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(on conserve la notation τ pour les flèches

$$P_1/j_1(V) \longrightarrow P_2/j_2(V)$$

et

$$\text{Der } P_1/\text{Int } P_1 \longrightarrow \text{Der } P_2/\text{Int } P_2$$

induites naturellement par τ). Cette relation d'isomorphie est bien entendu une relation d'équivalence sur les liens de même module $V \in Ob(\mathcal{V})$.

c. Composition. Comme dans le cas des extensions, nous définissons le composé de deux liens de L-module V, ainsi que le lien image par $f \in \mathcal{V}(V,W)$ d'un lien de L-module V. Nous passerons sur les vérifications un peu déprimantes des propriétés que nous énoncerons sans démonstration.

Soient Λ_i, $i = 1, 2$ deux liens de composantes respectives $(V, P_i, \varphi_i, j_i, M_i)$, $i = 1,2$. Le lien composé $\Lambda = \Lambda_1 * \Lambda_2$ est défini par ses composantes, à savoir :

i. Le L-module V,

ii. Le noyau (P,φ), quotient du noyau produit

$$(P_1,\varphi_1) \times (P_2,\varphi_2) = (P_1 \times P_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$$

par l'idéal $I = \{(j_1(v), -j_2(v)),\ v \in V\}$,

iii. L'injection $j:V \to \text{Cent } P$, $j(v) = \overline{(v,0)}$,

iv. L'extension M , image réciproque par le morphisme diagonal $\Delta:L \to L \times L$ de l'extension produit $M_1 \times M_2$, compte tenu de l'isomorphisme

$$P_1/j_1(V) \times P_2/j_2(V) \tilde{\to} P/j(V) .$$

Cette loi de composition est, à un isomorphisme près, commutative et associative.

Soit maintenant $f \in \mathcal{V}(V,W)$ un morphisme et $\Lambda = (V,P,\varphi,j,M)$ un lien de module V . On lui associe le lien $f.\Lambda$ dont les composantes sont

i. Le L-module W ,

ii. Le noyau (P_f, φ_f) quotient par l'idéal $I_f = \{(v, -f(v)),\ v \in V\}$ du noyau produit $(P,\varphi) \times (W)$,

iii. L'injection $j_f:W \to \text{Cent } P_f$, $j_f(w) = \overline{(w,0)}$, $w \in W$,

iv. L'extension $M_f = M$, compte tenu de l'isomorphisme $P/V \tilde{\to} P_f/W$.

Si U est un troisième objet de $\mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{V}(W,U)$ une flèche, on a la propriété d'associativité

$$g.(f.\Lambda) \tilde{\to} (g \circ f).\Lambda .$$

d. <u>Classe de cohomologie associée à un lien.</u> Nous allons décrire un procédé qui permet d'associer à un lien $\Lambda = (V,P,\varphi,j,M)$, de L-module $V \in \mathcal{O}b(\mathcal{V})$, un élément de $H^3(L,V)$. Cette construction est un peu fastidieuse, aussi invitons nous le lecteur à avoir de la patience. Soient $\tilde{\varphi}:L \to \text{Der } P$ un relèvement de φ , s une section de $M \to L$ et $\theta \in \text{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda}L,R)$ comme dans la définition 2. On a la suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow M \underset{s}{\rightleftarrows} L \longrightarrow 0 .$$

Une section σ de $P \to R$ permet d'écrire $P = V \oplus R$ et d'expliciter $\tilde{\varphi}$ par la formule

$$\tilde{\varphi}(l)(v,r) = (l.v+\psi(l,r),\ \tilde{\varphi}_{j(V)}(l)(r)),\ v \in V,\ r \in R,\ \psi \in \mathrm{Hom}_k(L \otimes R, V).$$

Soit alors $\Phi \in \mathrm{Hom}_k(\overset{3}{\Lambda} L, V)$, l'application trilinéaire alternée définie par la formule :

$$\Phi(l,l',l'') = \sum_{\sigma(l,l',l'')} \psi(l,\theta(l',l'')),\ l,l',l'' \in L\ ,$$

où $\sigma(l,l',l'')$ désigne le groupe des permutations paires des trois lettres l,l',l''.

PROPOSITION 3. *L'application Φ est un trois-cycle de L à valeurs dans V.*

Démonstration : Pour la décomposition $P = V \oplus R$ associée à σ, le crochet dans P est de la forme

$$[(v,r),(v',r')]_P = (\alpha(r,r'),[r,r']_R),\ v,v' \in V,\ r,r' \in R\ ,$$

où $\alpha \in \mathrm{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda} R, V)$. De même, à la section s, on associe une décomposition $M = R \oplus L$ et le crochet de M est donné par la formule

$$[(r,l)(r',l')]_M = ([r,r']_R + l \circledast r' - l' \circledast r + \theta(l,l'),\ [l,l']_L),$$

$$r,r' \in R,\ l,l' \in L\ ,$$

avec $l \circledast r = [s(l),r]_M = \tilde{\varphi}_V(l)(r)$.

Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

$$[l,l']_L \circledast r = l \circledast l' \circledast r + l' \circledast l \circledast r = [\theta(l,l'),r]_R,\ r \in R,\ l,l' \in L \qquad (1)$$

(c'est la définition de θ),

$$\sum_{\sigma(r,r',r'')} \alpha([r,r'],r'') = 0,\ r,r',r'' \in R \qquad (2)$$

(c'est la condition de Jacobi dans P),

$$\sum_{\sigma(l,l',l'')} (\theta([l,l'],l'') - l'' \circledast \theta(l,l')) = 0,\ l,l',l'' \in L \qquad (3)$$

(c'est la condition de Jacobi dans M),

$\Psi(l,[r,r']_R) = -l.\alpha(r,r')+\alpha(l \circledast r,r')+\alpha(r,l \circledast r')$, $r,r' \in R$, $l \in L$ (4)

(car $\tilde{\varphi}(l)$ est une dérivation de P),

$\Psi([l,l'],r) = \Psi(l,l' \circledast r) - \Psi(l',l \circledast r)+l.\Psi(l',r)-l'.\Psi(l,r)+\alpha(\theta(l,l'),r))$

$l,l' \in L$, $r \in R$ (5)

(c'est la condition (ii) de la définition 2).

Il ne reste plus qu'à expliciter (sur une grande feuille de papier) la différentielle de Φ pour se convaincre facilement, à l'aide des relations précédentes, de la proposition. On note $Obs(\Lambda)$ ("obstruction du lien Λ") la classe de Φ dans $H^3(L,V)$; ce qui a un sens d'après la proposition suivante :

PROPOSITION 4. La classe $Obs(\Lambda)$ ne dépend que du lien Λ et non des relèvements choisis.

La vérification se fait en deux temps. On conserve d'abord la section σ et on prend un autre couple $(\tilde{\varphi}',t)$ où $\tilde{\varphi}'$ est un relèvement de φ et t une section de $M \to L$. Soient $\theta' \in \mathrm{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda}L,R)$ et $\Psi' \in \mathrm{Hom}_k(L \otimes R,V)$ les fonctions correspondantes. Nous allons exprimer le trois-cycle Φ' associé au nouveau relèvement choisi en fonction de Φ. En utilisant la décomposition $M = R \oplus L$ associé à la section s on peut écrire :

$t(l) = (u(l),l)$, $l \in L$, $u \in \mathrm{Hom}_k(L,R)$.

On en déduit :

$\theta'(l,l') = \theta(l,l')+[u(l),u(l')]_R + l \circledast u(l')-l' \circledast u(l)-u([l,l']),l,l' \in L$,

ainsi que

$\Psi'(l,r) = \Psi(l,r) + \alpha(u(l),r)$, $l \in L$, $r \in R$.

On en déduit

$\Phi' = \Phi + d\Omega$

où $\Omega \in \mathrm{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda}L, V)$ est donné par la formule

$$\Omega(l,l') = \Psi(l,u(l')) - \Psi(l',u(l) - \alpha(u(l),u(l')),\ l,l' \in L\ .$$

On montre maintenant de manière analogue l'indépendance de $\mathcal{Obs}(\Lambda)$ du choix de la section σ.

Soient Λ et Λ' deux liens de même module $V \in \mathcal{Ob}(\mathcal{V})$ et $f \in \mathcal{V}(V,W)$ une flèche.

PROPOSITION 5. On a les relations

$$\mathcal{Obs}(\Lambda * \Lambda') = \mathcal{Obs}(\Lambda) + \mathcal{Obs}(\Lambda'),$$

$$\mathcal{Obs}(f.\Lambda) = H^3(L,f)(\mathcal{Obs}(\Lambda))\ .$$

On laisse la vérification au lecteur incrédule.

e. Liens réalisables.

DEFINITION 3. Un lien $\Lambda = (V,P,\varphi,j,M)$ est dit réalisable s'il existe une extension

$$0 \to P \to N \to L \to 0$$

induisant le noyau (P,φ) et une flèche $N \to M$ rendant commutatif le diagramme d'algèbres de Lie suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L \longrightarrow 0\ . \end{array}$$

Les liens réalisables sont caractérisés par la proposition suivante.

PROPOSITION 6. Un lien Λ est réalisable si et seulement si son obstruction $\mathcal{Obs}(\Lambda)$ est nulle.

En effet soit $\Lambda = (V,P,\varphi,j,M)$ un lien réalisable. Il existe alors un diagramme commutatif d'algèbres de Lie du type précédent, un relèvement

$\tilde{\varphi}: L \to \mathrm{Der}\, P$ de φ, des sections s_1, s et σ de $N \to L$, $M \to L$ et $P \to R$ respectivement tels que si

$$P = V \oplus R \ , \ M = R \oplus L \ , \ N = V \oplus R \oplus L$$

sont les décompositions associées aux sections, alors les flèches du diagramme se définissent de façon évidente et, avec les notations de (d), le crochet de N est donné par la formule

$$[(v,r,l)(v',r',l')]_N = (l.v' - l'.v + \Psi(l,r') - \Psi(l',t) + \alpha(r,r') + \omega(l,l'), l \circledast r' - l' \circledast r$$
$$+ \theta(l,l') + [r,r']_R - [l,l']_L) \quad \forall\, v' \in V,\ r,r' \in R,\ l,l' \in L$$
$$\omega \in \mathrm{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda} L, V) \ .$$

La condition de Jacobi dans N donne alors $d\omega = \Phi$. Inversement si $d\omega = \Phi$, on voit, d'après la première partie de la démonstration, qu'on peut construire une réalisation explicite du lien Λ.

f. Le foncteur h. Comme dans le cas des extensions nous allons maintenant identifier certains liens. Soient Λ_1 et Λ_2 deux liens de même module $V \in Ob(\mathcal{V})$.

PROPOSITION 7. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) Les liens Λ_1 et Λ_2 ont même obstruction.

(ii) Il existe deux liens réalisables Λ'_1 et Λ'_2 de module V tels que

$$\Lambda_1 * \Lambda'_1 \simeq \Lambda_2 * \Lambda'_2 \ .$$

L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) résulte de la proposition 5. Démontrons (i) $\Longrightarrow$ (ii). Posons

$$\Lambda'_1 = \Lambda_2 * (-\Lambda_1) \quad \text{et} \quad \Lambda'_2 = \Lambda_1 * (-\Lambda_2) \ .$$

D'après la proposition 6 les liens Λ'_1 et Λ'_2 sont réalisables et, puisque la composition des liens est associative et commutative à un isomorphisme près, on a

$$\Lambda_1 * \Lambda'_1 \simeq \Lambda_2 * \Lambda'_2 \ .$$

Deux liens de même module $V \in Ob(\mathcal{V})$ vérifiant les conditions précédentes sont dits équivalents. On note $\mathfrak{h}(V)$ l'ensemble des classes d'équivalence des liens de module V. En résumé on a :

THEOREME 3. Les lois de composition sur les liens munissent $\mathfrak{h}(V)$ d'une structure de k-espace vectoriel et la correspondance qui à chaque lien associe son obstruction définit une application

$$\mathfrak{h}(V) \longrightarrow H^3(L,V)$$

linéaire, injective et fonctorielle en V.

A partir de maintenant $\mathfrak{h}$ sera identifié à un sous-foncteur du foncteur $H^3(L,)$.

4. UNE DESCRIPTION FONCTORIELLE DE $H^3_e(L,)$.

Cette description est résumée par :

THEOREME 4. Les foncteurs $\mathfrak{h}$ et $H^3_e(L,)$ coïncident.

L'inclusion $\mathfrak{h}(V) \subset H^3_e(L,V)$, $V \in Ob(\mathcal{V})$, résulte, d'après le théorème 2, de l'énoncé suivant :

LEMME 1. Si L est semi-simple, $\mathfrak{h}(V) = 0$, $V \in Ob(\mathcal{V})$.

Démonstration du lemme. D'après un théorème de Whitehead le foncteur $H^3(L,)$ prend les mêmes valeurs sur V que sur le sous-espace V^L des invariants de V sous L. Il suffit donc, pour démontrer le lemme, de considérer un lien $\Lambda = (V,P,\varphi,j,M)$ où L opère trivialement sur V. Pour calculer un représentant $\Phi \in Z^3(L,V)$ de $Obs(\Lambda)$ on choisit un relèvement $\tilde{\varphi}$ de φ, une section s de la projection $M \to L$, une section σ de $P \to R = P/j(V)$ et on pose

$$\theta(l,l') = [s(l),s(l')]_M - s([l,l']_L),\ l,l' \in L,$$

$$\tilde{\varphi}(l)(v,r) = (l.v+\Psi(l,r),[s(l),r]_R),\ l \in L,\ r \in R,$$

comme dans la partie 3,d. Le trois-cycle Φ est donné par la formule

$$\Phi(1,1',1'') = \sum_{\sigma(1,1',1'')} \Psi(1,\theta(1',1'')),\ 1,1',1'' \in L\ .$$

Maintenant, puisque L est semi-simple, l'extension M est inessentielle. On peut donc choisir une sous-algèbre supplémentaire de R dans M, isomorphe à L (décomposition de Levi) et écrire $M = R \oplus L$, le crochet dans M étant alors donné par la formule

$$[(r,1)(r',1')]_M = ([r,r']_R + 1 \circledast r' - 1' \circledast r, [1,1']_L),\ r,r' \in R,\ 1,1' \in L\ .$$

Dans cette décomposition de Lévi de M, la section s s'écrit

$$s(1) = (t(1),1),\ 1 \in L,\ t \in \mathrm{Hom}_k(L,R)\ .$$

Les conditions (4) et (5) de 3,d deviennent alors

$$\Psi(1,[r,r']_R) = \alpha(t(1),[r,r']_R) + \alpha(1 \circledast r,r') + \alpha(r,1 \circledast r'),\ 1 \in L,\ r,r' \in R,\quad (4'),$$

$$\Psi(1,1' \circledast r) - \Psi(1',1 \circledast r) - \Psi([1,1'],r) = \alpha(t(1),1' \circledast r) - \alpha(t(1'),1 \circledast r) - \alpha(t([1,1']),r),$$

$$1,1' \in L,\ r \in R\quad (5')\ .$$

On en déduit une nouvelle expression de Φ:

$$\Phi(1,1',1'') = \sum_{\sigma(1,1',1'')} (\alpha(t(1''),t([1,1'])) - \Psi(1'',t([1,1'])) + \Psi([1,1'],t(1'')),1,1',1'' \in L.$$

On voit alors que si on pose

$$\Omega_1(1,1') = \alpha(t(1),t(1')),\ 1,1' \in L$$

$$\Omega_2(1,1') = \Psi(1,t(1')) - \Psi(1',t(1)),\ 1,1' \in L\ ,$$

on a

$$\Phi = d(\Omega_1 + \Omega_2)\ .$$

Ce qui termine la démonstration du lemme.

L'inclusion $\mathcal{h}(V) \supset H_e^3(L,V)$ résulte de la propriété universelle des satellites. En effet, soit

$$0 \longrightarrow W' \xrightarrow{i} W \longrightarrow W'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte dans $\mathcal{V}$ et

$$0 \longrightarrow W'' \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

un objet de $\mathcal{Ext}(L,W'')$. On lui associe le lien Λ' de composantes $(W',(W),i,M)$ où (W) est le noyau associé au L-module W (cf. 3, exemple 2). D'où une application

$$\mathrm{Ext}(L,W'') \xrightarrow{\delta'} \mathcal{h}(W') .$$

LEMME 2. L'application δ' coïncide avec l'opérateur-bord δ.

En effet, un représentant Φ' de $\mathcal{Obs}(\Lambda')$ est donné par la formule

$$\Phi'(l,l',l'') = \sum_{\sigma(l,l',l'')} \Psi(l,\theta''(l',l'')),\ l,l',l'' \in L ,$$

où $\theta'' \in \mathrm{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda}L,W'')$ est défini à partir d'une section s de $M \to L$ par

$$\theta''(l,l') = [s(l),s(l')] - s([l,l']),\ l,l' \in L ,$$

et où $\Psi \in \mathrm{Hom}_k(W'' \otimes L,\ W')$ est défini à partir d'une section σ de $W \to W''$ par

$$l.(w',w'') = (lw'+\Psi(l,w''),l.w''),\ l \in L,\ w' \in W',\ w'' \in W'' .$$

On voit maintenant que θ'' est un représentant de la classe q'' de l'extension M et Φ' un représentant de $\delta(q'')$ ce qui achève la démonstration du lemme 2.

On termine alors la démonstration de l'inclusion $\mathcal{h}(V) \supset H_e^3(L,V)$ de façon standard [1] : soit $q' \in H_e^3(L,V')$ et

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{i} V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de $\mathcal{V}$ où i réalise l'effacement de q'. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^2_e(L,V'') & \xrightarrow{\delta} & H^3_e(L,V') & \xrightarrow{i} & H^3_e(L,V) \\ \uparrow \wr\lambda & & \uparrow & & \\ \mathrm{Ext}(L,V'') & \longrightarrow & \mathfrak{k}(V') & & \end{array} .$$

Puisque $i(q') = 0$ et que $\mathrm{Ker}\, i = \mathrm{Im}\, \delta$ il existe $r'' \in H^2_e(L,V'')$ tel que $q' = \delta(r'') = \delta'\lambda^{-1}(r'') \in \mathfrak{k}(V')$.

Remarque à propos du théorème de Hochschild sur les noyaux. Un lien Λ de composantes V,P,φ,j,M est dit strict si l'injection $j:V \to \mathrm{Cent}\ P$ est un isomorphisme. Par exemple, si (P,φ) est un noyau le lien Λ , de composantes $\mathrm{Cent}(P),P,\varphi,\mathrm{id},M$ (où M est l'extension réalisant le noyau quotient $(P/\mathrm{Cent}\ P,\varphi_{\mathrm{Cent}\ P})$) (cf. proposition 2), est un lien strict. Le théorème de Hochschild (cf. [7], théorème 4) qui caractérise les classes de cohomologie effaçables à partir des noyaux peut s'énoncer sous la forme suivante.

THEOREME DE HOCHSCHILD. Tout lien est équivalent à un lien strict.

5. SUR LES LIENS REALISABLES.

Soit $\Lambda = (V,P,\varphi,j,M)$ un lien réalisable. On définit une catégorie $\mathscr{A}_\Lambda$, attachée à Λ , comme suit

i. Les objets de $\mathscr{A}_\Lambda$ sont les diagrammes commutatifs d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où l'extension N réalise le noyau (P,φ) .

ii. Si A_i, $i = 1,2$, sont deux objets de $\mathscr{A}_\Lambda$, les extensions

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow N_i \longrightarrow L \longrightarrow 0, \quad i = 1,2,$$

réalisant le noyau (P,φ), alors l'ensemble $\mathscr{A}_\Lambda(A_1,A_2)$ des flèches $A_1 \to A_2$

est l'ensemble des morphismes d'algèbres de Lie $N_1 \to N_2$ tels que les deux diagrammes suivantes commutent

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} N_1 & \longrightarrow & N_2 \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & M & \end{array}$$

On voit que $\mathscr{A}_\Lambda(A_1,A_2)$ est, ou bien vide, ou bien formé d'isomorphismes.

LEMME 1. Si A_1 et A_2 sont deux objets de $\mathscr{A}_\Lambda$ tels que $\mathscr{A}_\Lambda(A_1,A_2) \neq \emptyset$, alors $\mathscr{A}_\Lambda(A_1,A_2) \simeq Z^1(L,V)$.

En effet soient N_i, $i = 1,2$ les réalisations du noyau (P,φ) dans les diagrammes de A_1 et A_2 respectivement. On a, en utilisant les notations de la proposition 6

$$N_i = V \oplus R \oplus L , \quad i = 1,2$$

$$[(0,0,l),(0,0,l')]_{N_i} = (\omega_i(l,l'),\theta(l,l'),[l,l']_L), \; l,l' \in L, \quad i = 1,2 .$$

L'isomorphisme $\lambda : N_1 \to N_2$ se met alors sous la forme

$$\lambda(v,r,l) = (v+u(l),r,l), \; v \in V, \; r \in R, \; l \in L, \; u \in \mathrm{Hom}_k(L,V) .$$

En écrivant que λ respecte les structures d'algèbres de Lie il vient

$$\omega_1 - \omega_2 = du .$$

Deux objets, satisfaisant aux hypothèses du lemme 1, sont dits équivalents et on note A_Λ l'ensemble des classes d'équivalence d'objets de $\mathscr{A}_\Lambda$ pour cette relation.

Soient maintenant

$$E: 0 \longrightarrow V \longrightarrow D \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

un objet de $\mathscr{E}xt(L,V)$ et

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un objet de $\mathcal{R}_\Lambda$. On leur associe l'objet $E.A$ de $\mathcal{R}_\Lambda$ défini comme suit. On considère l'image réciproque

$$0 \longrightarrow P \times V \longrightarrow N \dot{\times} D \longrightarrow L \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

par le morphisme diagonal $\Delta: L \to L \times L$ de l'extension produit

$$0 \longrightarrow P \times V \longrightarrow N \times D \longrightarrow L \times L \longrightarrow 0$$

et on remarque que l'idéal $I = \{(j(v),-v),\ v \in V\}$ de l'algèbre de Lie produit $P \times V$ est aussi un idéal de l'algèbre de Lie $N \dot{\times} D$, ce qui permet de définir l'image directe de (1) par le morphisme $P \times V \longrightarrow P \times V/I$ soit

$$0 \longrightarrow P \times V/I \longrightarrow N \dot{\times} D/I \longrightarrow L \longrightarrow 0 .$$

Une nouvelle réalisation du lien Λ est donnée par le diagramme suivant où les flèches se définissent de façon évidente

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & P\times V/I & & & & \\ & & 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N \dot{\times} D/I & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On vérifie facilement que cette construction définit une application

$$\mathrm{Ext}(L,V) \times A_\Lambda \longrightarrow A_\Lambda$$

et qu'on a :

LEMME 2. L'application $\mathrm{Ext}(L,V) \times A_\Lambda \longrightarrow A_\Lambda$ précédente satisfait aux propriétés

i. $E_1.(E_2.A) = (E_1 * E_2).A$, $E_1, E_2 \in \mathrm{Ext}(L,V)$, $A \in A_\Lambda$,

ii. $(E_1.A = A) \Longleftrightarrow (E_1 = 0)$,

iii. Pour tout couple (A_1,A_2) d'éléments de A_Λ il existe un élément E de $\mathrm{Ext}(L,V)$ tel que $E.A_1 = A_2$.

En fixant un objet de $\mathscr{A}_\Lambda$ on déduit du lemme 1 et de la propriété (iii) du lemme 2 la

PROPOSITION 7. Les catégories $\mathscr{E}xt(L,V)$ et $\mathscr{A}_\Lambda$ sont équivalentes.

Soient f une flèche de $\mathscr{V}(V,W)$ et $f.\Lambda$ le lien image par f de Λ. A toute réalisation A de Λ on associe une réalisation $f.A$ de $f.\Lambda$ de la façon suivante. Soit $W \overset{\cdot}{\times} L$ le produit semi-direct défini par l'opération de L sur W (cf. première partie). L'extension cherchée est alors (on commence par avoir l'habitude) l'image directe par le morphisme $P \times W \to P \times W/I$, $I = \{(v,-f(v)),\ v \in V\}$ de l'image réciproque par le morphisme diagonal $L \to L \times L$ de l'extension produit

$$0 \longrightarrow P \times W \longrightarrow N \overset{\cdot}{\times} (W \overset{\cdot}{\times} L) \longrightarrow L \times L \longrightarrow 0 .$$

D'où une application

$$A_\Lambda \longrightarrow A_{f\Lambda}$$

et le

LEMME 3. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}(L,V) \times A_\Lambda & \longrightarrow & A_\Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}(L,W) \times A_{f\Lambda} & \longrightarrow & A_{f\Lambda} \end{array} .$$

En résumé on peut énoncer :

THEOREME 5. Les constructions précédentes munissent A_Λ d'une structure d'espace affine, d'espace vectoriel associé $\mathrm{Ext}(L,V)$, fonctorielle en V.

CHAPITRE 2.

RELEVEMENT DE LOIS D'ALGEBRES DE LIE, DE MORPHISMES.

Nous allons maintenant utiliser les notions introduites dans le chapitre précédent pour étudier des problèmes de relèvement de lois d'algèbres de Lie ou de morphismes d'algèbres de Lie. Si L^B est une B-algèbre de Lie, où B est une k-algèbre associative, commutative, unitaire, et k un corps de caractéristique zéro, on note L^B_k l'algèbre de Lie obtenue par restriction au corps k de l'anneau des scalaires. Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie sur k, A une k-algèbre (associative, commutative et unitaire) possédant un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de corps résiduel k et $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ deux idéaux de A, de codimension finie dans A et tels que :

$$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{i} \supset \mathfrak{j} \ , \ \mathfrak{m} . \mathfrak{i} \subset \mathfrak{j} \ .$$

1. CAS DES ALGEBRES DE LIE.

Une loi $L^{A/\mathfrak{j}}$ de $A/\mathfrak{j}$-algèbre de Lie sur $V \otimes A/\mathfrak{j}$ induit, par passage au quotient, une loi de $A/\mathfrak{i}$-algèbre de Lie sur $V \otimes A/\mathfrak{i}$. Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une loi $L^{A/\mathfrak{i}}$, de $A/\mathfrak{i}$-algèbre de Lie sur $V \otimes A/\mathfrak{i}$, provienne de cette façon d'une loi de $A/\mathfrak{j}$-algèbre de Lie sur $V \otimes A/\mathfrak{j}$. La loi $L^{A/\mathfrak{i}}$ induit sur V une loi L de k-algèbre de Lie et sur $V \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j}$ une structure de L-module. En effet si

$$i : V \to V \otimes A/\mathfrak{i} \quad \text{et} \quad \pi : V \otimes A/\mathfrak{i} \to V$$

désignent respectivement l'injection et la projection canonique, on pose

$$[v,v']_L = \pi([i(v),i(v')]_{L^{A/\mathfrak{i}}}) \ , \ v,v' \in V \ .$$

D'autre part la condition $\mathfrak{m}.i \subset j$ permet de munir $V \otimes \mathfrak{m}/j$ d'une structure de $L^{A/i}$-module en posant

$$(v \otimes \bar{\bar{a}}) * (v' \otimes \bar{m}) = \sum_i u_i \otimes (\bar{b}_i \bar{a}\, \bar{m}),\ \bar{b}_i, \bar{a} \in A/j\ ,\ \bar{m} \in \mathfrak{m}/j\ ,$$

où

$$[v \otimes 1,\ v' \otimes 1]_{L^{A/i}} = \sum_i u_i \otimes \bar{\bar{b}}_i,\ v, v', u_i \in V,\ \bar{\bar{b}}_i \in A/i\ ,$$

et où $\bar{b}_i$ (resp. $\bar{a}$) désigne un représentant quelconque de $\bar{\bar{b}}_i$ (resp. $\bar{\bar{a}}$) dans A/j. On remarque enfin que $V \otimes i/j$ est un sous-$L^{A/i}$-module de $V \otimes \mathfrak{m}/i$; c'est même un L-module puisque $\mathfrak{m}.i \subset j$.

Ceci étant, nous allons attacher un lien à la loi $L^{A/i}$. On a le diagramme suivant formé de deux suites exactes d'espaces vectoriels sur k

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V \times i/j & \to & V \otimes \mathfrak{m}/j & \to & V \otimes \mathfrak{m}/i & \to & 0 \\ & & & & & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ & & & & 0 & \to & V \otimes \mathfrak{m}/i & \to & V \otimes A/i \to V \to 0 \end{array}$$

Notons R l'idéal de $L^{A/i}$ égal à $V \otimes \mathfrak{m}/i$. On a la suite exacte de k-algèbres de Lie

$$0 \to R_k \to L_k^{A/i} \to I \to 0 \qquad (1).$$

Remarquons que l'on peut munir $V \otimes \mathfrak{m}/j$ d'une loi P de A/j-algèbre de Lie en posant

$$[v \otimes \bar{m},\ v' \otimes \bar{m}']_P = \sum_i u_i \otimes (\bar{a}_i \bar{\bar{m}}\bar{\bar{m}}'),\ \bar{m}, \bar{m}' \in \mathfrak{m}/j$$

avec

$$[v \otimes 1,\ v' \otimes 1]_{L^{A/i}} = \sum_i u_i \otimes \bar{\bar{a}}_i,\ v, v' \in V,\ \bar{\bar{a}}_i \in A/i\ ,$$

et où $\bar{a}_i$ est un représentant quelconque de $\bar{\bar{a}}_i$ dans A/j. Alors $V \otimes i/j$ est un idéal central de P et $P/(V \otimes i/j) \simeq R$. D'où la suite exacte de

k-algèbres de Lie

$$0 \to V \otimes i/j \to P_k \to R_k \to C .$$

La loi $L^{A/i}$ permet aussi de définir un morphisme

$$\varphi : L \to \mathrm{Der}\ P_k / \mathrm{Int}\ P_k ,$$

un relèvement $\tilde{\varphi} : L \to \mathrm{Der}\ P_k$ de φ étant défini par la formule

$$\tilde{\varphi}(v \otimes \bar{\bar{a}})(v' \otimes \bar{m}) = (v \otimes \bar{\bar{a}}) * (v' \otimes \bar{m}),\ v, v' \in V,\ \bar{\bar{a}} \in A/i ,\ \bar{m} \in \mathfrak{m}/j .$$

Soit $\Lambda(L^{A/i})$ le lien de composantes

i. Le L-module $V \otimes i/j$,

ii. Le noyau (P_k, φ) ,

iii. L'extension (1).

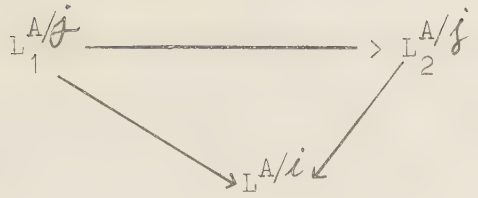
Considérons maintenant un relèvement $L^{A/j}$ de $L^{A/i}$. On a le diagramme commutatif d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & P_k & \to & L_k^{A/j} & \to L \to & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow & \downarrow \mathrm{id} & \\ 0 & \to & V \otimes i/j & \to & P_k & \to L_k^{A/i} \to & L \to 0 \end{array}$$

et l'extension

$$0 \to P_k \to L_k^{A/j} \to L \to 0$$

définit le noyau (P_k, φ). D'où une réalisation du lien $\Lambda(L^{A/i})$ associée à $L^{A/j}$. De plus si $L_1^{A/j}$ et $L_2^{A/j}$ sont deux relèvements de $L^{A/i}$ alors la condition nécessaire et suffisante pour que les réalisations associées soient équivalentes est qu'il existe un morphisme de A/j-algèbres de Lie rendant commutatif le diagramme



On note $R(L^{A/i})$ l'ensemble des classes de relèvement de $L^{A/i}$ pour la relation précédente.

Inversement soit

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & P_k & \to & N & \to & L & \to & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \to & V \otimes i/j & \to & P_k & \to & L_k^{A/i} & \to & L \to 0 \end{array}$$

une réalisation du lien $\Lambda(L^{A/i})$. Choisissons alors un isomorphisme d'espace vectoriel rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V \otimes \mathfrak{m}/j & \to & V \otimes A/j & \to & V & \to & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \to & V \otimes \mathfrak{m}/j & \to & N & \to & V & \to & 0 \end{array}$$

On en déduit une structure de k-algèbre de Lie sur $V \times A/j$ qui est en fait une structure de A/j-algèbre de Lie sur $V \otimes A/j$ induisant $L^{A/i}$.

LEMME 1. La construction précédente définit une bijection entre l'ensemble $R(L^{A/i})$ des classes de relèvements de la loi $L^{A/i}$ et l'ensemble $A(\Lambda(L^{A/i}))$ des classes de réalisations du lien $\Lambda(L^{A/i})$.

Du chapitre 1 (proposition 6 et théorème 5) et du lemme 1 on déduit :

THEOREME 1. Soit $L^{A/i}$ une loi de A/i-algèbre de Lie sur $V \otimes A/i$. Alors

a. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une loi $L^{A/j}$

de $A/\mathfrak{j}$-algèbre de Lie sur $V \otimes A/\mathfrak{j}$ induisant $L^{A/i}$ est que l'obstruction au lien $\Lambda(L^{A/i})$, $Obs\,(\Lambda(L^{A/i})) \in H^3_e(L, V \otimes i/\mathfrak{j})$, soit nulle.

b. Si la condition ci-dessus est vérifiée, l'ensemble $R(L^{A/i})$ des classes de relèvements de la loi $L^{A/i}$ est un espace principal homogène sous $H^2(L, V \otimes i/\mathfrak{j})$.

Remarque. Si, au lieu d'identifier les lois de $A/\mathfrak{j}$-algèbres de Lie isomorphes, on considère l'ensemble des lois alors la proposition b du théorème 1 reste valable en remplaçant H^2 par Z^2. Si

$$[e_i,e_j] = \Sigma\, a_{ijk}e_k,\ a_{ijk} \in A/\mathfrak{j}\ ,\ i,j = 1,2,\ldots,n$$

définit un relèvement de $L^{A/}$ dans une base $\{e_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}$, les autres relèvements sont alors donnés par la formule

$$[e_i,e_j] = \Sigma\, a_{ijk}e_k + f(e_i,e_j),\ f \in Z^2(L, V \otimes i/\mathfrak{j}) .$$

2. CAS DES MORPHISMES D'ALGEBRES DE LIE.

Soient $L^{A/\mathfrak{j}}$ et $K^{A/\mathfrak{j}}$ deux lois de $A/\mathfrak{j}$-algèbres de Lie sur $V \otimes A/\mathfrak{j}$ et $W \otimes A/\mathfrak{j}$ respectivement, $L^{A/i}$ (resp. L) et $K^{A/i}$ (resp. K) les lois de A/i (resp. k)-algèbres de Lie induites par passage au quotient sur $V \otimes A/i$ (resp. V) et $W \otimes A/i$ (resp. W). Un morphisme $\rho^{A/\mathfrak{j}} : L^{A/\mathfrak{j}} \to K^{A/\mathfrak{j}}$ de $A/\mathfrak{j}$-algèbres de Lie induit alors un morphisme $\rho^{A/i} : L^{A/i} \to K^{A/i}$ de A/i-algèbres de Lie ainsi d'ailleurs qu'un morphisme $\rho : L \to K$ de k-algèbres de Lie. Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un morphisme $\rho^{A/i} : L^{A/i} \to K^{A/i}$ provienne, de cette façon, d'un morphisme $\rho^{A/\mathfrak{j}} : L^{A/\mathfrak{j}} \to K^{A/\mathfrak{j}}$.

On munit, comme dans le paragraphe précédent, $V \otimes i/\mathfrak{j}$ (resp. $W \otimes i/\mathfrak{j}$) de sa structure de L-(resp. K-) module induite ; via ρ, $W \otimes i/\mathfrak{j}$ est aussi un L-module. On note $P^{\mathfrak{j}}$ et $Q^{\mathfrak{j}}$ (resp. P^{i} et Q^{i}) les idéaux de $L^{A/\mathfrak{j}}$ et

$K^{A/\mathfrak{j}}$ (resp. $L^{A/\mathfrak{i}}$ et $K^{A/\mathfrak{i}}$) sous-tendus par $V \otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{j}$ et $W \otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{j}$ (resp. $V \otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{i}$ et $W \otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{i}$) respectivement. La condition $\mathfrak{m}.\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$ permet de définir un relèvement $\varpi^{\mathfrak{j}} : P^{\mathfrak{j}} \to Q^{\mathfrak{j}}$ de la restriction $\varpi^{\mathfrak{i}} : P^{\mathfrak{i}} \to Q^{\mathfrak{i}}$ du morphisme $\rho^{A/\mathfrak{i}}$, en posant

$$\varpi^{\mathfrak{j}}(v \otimes \bar{m}) = \sum_i w_i \otimes (\bar{a}_i \bar{m}),\ v \in V,\ \bar{m} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{j},$$

avec

$$\rho^{A/\mathfrak{i}}(v \otimes 1) = \sum_i w_i \otimes \bar{\bar{a}}_i,\ w_i \in W,\ \bar{\bar{a}}_i \in A/\mathfrak{i},$$

et où $\bar{a}_i$ est un représentant quelconque de $\bar{\bar{a}}_i$ dans $A/\mathfrak{j}$. Ce relèvement est la restriction à $P^{\mathfrak{j}}$ de tout morphisme $\rho^{A/\mathfrak{j}}$ (s'il en existe) qui induit $\rho^{A/\mathfrak{i}}$. De plus la restriction f de $\varpi^{\mathfrak{j}}$ au L-module $V \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j}$ vérifie la condition

$$f(l.v) = \rho(l).f(v),\ l \in L,\ v \in V \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j} ;$$

c'est-à-dire que f est un L-homomorphisme pour les structures de L-modules de $V \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j}$ et $W \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j}$. On en déduit le diagramme commutatif d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & V \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j} & \to & P_k^{\mathfrak{j}} & \to & P_k^{\mathfrak{i}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow \varpi^{\mathfrak{j}} & & \downarrow \varpi^{\mathfrak{i}} & & \\
0 & \to & W \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j} & \to & Q_k^{\mathfrak{j}} & \to & Q_k^{\mathfrak{i}} & \to & 0
\end{array} .$$

D'où, d'après un résultat classique, le diagramme de factorisation à travers les images directe par f et réciproque par $\varpi^{\mathfrak{i}}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & V \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j} & \to & P_k^{\mathfrak{j}} & \to & P_k^{\mathfrak{i}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow d & & \downarrow id & & \\
0 & \to & W \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j} & \to & P' & \to & P_k^{\mathfrak{i}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow id & & \downarrow \varpi' & & \downarrow id & & \\
0 & \to & W \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j} & \to & Q' & \to & P_k^{\mathfrak{i}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow id & & \downarrow r & & \downarrow \varpi^{\mathfrak{i}} & & \\
0 & \to & W \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j} & \to & Q_k^{\mathfrak{j}} & \to & Q_k^{\mathfrak{i}} & \to & 0
\end{array}$$

où le morphisme $\varpi' : P' \to Q'$ est un isomorphisme.

Ces constatations étant faites, considérons le lien réalisable $f.\Lambda(L^{A/i})$ image par f du lien $\Lambda(L^{A/i})$. Une première réalisation est donnée par l'image par f de la réalisation associée à $L^{A/j}$. On a le diagramme commutatif de suites exactes d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & \to & P' & \to & L' & \to & L & \to & 0 \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \to & W \otimes i/j & \to & P' & \to & L_k^{A/i} & \to & L & \to & 0 & & \end{array}$$

où L' est l'image directe de $L_k^{A/j}$ par f (c'est-à-dire que l'on a le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V \otimes i/j & \to & L_k^{A/j} & \to & L_k^{A/i} & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & W \otimes i/j & \to & L' & \to & L_k^{A/j} & \to & 0). \end{array}$$

Une deuxième réalisation s'obtient en prenant l'image réciproque de $K_k^{A/j}$ par $\rho^{A/i}$. On a donc le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & W \otimes i/j & \to & K' & \to & L_k^{A/i} & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{A/i}} & & \\ 0 & \to & W \otimes i/j & \to & K_k^{A/j} & \to & K_k^{A/i} & \to & 0 \ . \end{array}$$

D'où la suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \to Q' \to K' \to L \to 0$$

et, via ϖ', la réalisation cherchée

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & \to & P' & \to & K' & \to & L & \to & 0 \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \to & W \otimes i/j & \to & P' & \to & L_k^{A/i} & \to & L & \to & 0 \ . & & \end{array}$$

Soit maintenant $\rho^{A/j}$ un relèvement de $\rho^{A/i}$. On lui associe le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V \otimes i/j & \to & L_k^{A/j} & \to & L_k^{A/i} & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{A/j}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{A/i}} & & \\ 0 & \to & W \otimes i/j & \to & K_k^{A/j} & \to & K_k^{A/i} & \to & 0 \ , \end{array}$$

d'où le diagramme de factorisation

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & V \otimes i/j & \to & L_K^{A/j} & \to & L_k^{A/i} & \to & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow id & & \\
0 & \to & W \otimes i/j & \to & L' & \to & L_k^{A/i} & \to & 0 \\
 & & \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow id & & \\
0 & \to & W \otimes i/j & \to & K' & \to & L_k^{A/i} & \to & 0 \\
 & & \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow \rho^{A/i} & & \\
0 & \to & W \otimes i/j & \to & K_k^{A/j} & \to & K_k^{A/i} & \to & 0
\end{array}$$

On en déduit :

LEMME 2. La construction précédente définit une bijection entre l'ensemble des relèvements du morphisme $\rho^{A/i}$ et l'ensemble des flèches entre les deux réalisations données du lien $f.\Lambda(L^{A/i})$.

On note $Obs(\rho^{A/i}) \in H^2(L, W \otimes i/j)$ la classe de l'extension "différence" associée aux deux réalisations du lien $f.\Lambda(L^{A/i})$ (cf. chapitre 1, paragraphe 5). On a alors :

THEOREME 2. Soient $L^{A/j}$ (resp. $K^{A/j}$) une loi de A/j-algèbre de Lie sur $V \times A/j$ (resp. $W \otimes A/j$) et $\rho^{A/i} : L^{A/i} \to K^{A/i}$ un morphisme des algèbres induites. Alors

a. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un relèvement $\rho^{A/j} : L^{A/j} \to K^{A/j}$ au morphisme $\rho^{A/i}$ est que $Obs(\rho^{A/i}) = 0$.

b. Si la condition précédente est satisfaite l'ensemble des relèvements de $\rho^{A/i}$ est un espace principal homogène sous $Z^1(L, W \otimes i/j)$.

C'est une conséquence du lemme 2 et du chapitre 1, paragraphe 5, lemme 1 et 2. Si $\rho^{A/j}$ est un relèvement de $\rho^{A/i}$ défini par la formule

$$\rho^{A/\mathfrak{j}}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j \ , \quad \lambda_{ij} \in A/\mathfrak{j}$$

dans une base $\{e_i, i = 1,2,\ldots,n\}$ de V , les autres relèvements sont alors définis par

$$\rho^{A/\mathfrak{j}}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j + f(e_i) \ , \quad f \in Z^1(L, V \otimes \mathfrak{i}/\mathfrak{j}) \ .$$

CHAPITRE 3.

VARIATION D'ALGEBRES ET DE MORPHISMES.

Dans ce chapitre, où k désigne un corps de caractéristique zéro, on étudie deux variétés. Les points rationnels de la première sont les lois d'algèbre de Lie sur un espace vectoriel donné V de dimension finie n sur k ; ceux de la seconde sont les triplets (L', L'', ρ) où L' (resp. L'') est une loi d'algèbre de Lie sur un espace vectoriel donné V' (resp. V'') de dimension finie n' (resp. n'') sur k et ρ un morphisme de L' dans L'' .

1. NOTATIONS ([3] et [15]).

On désigne par $k[\varepsilon] = k[X]/(X^2)$ l'algèbre des nombres duaux sur k et par $p: k[\varepsilon] \to k$, $a+b\varepsilon \mapsto a$, $a,b \in k$, la projection canonique.

Soient $\mathcal{X}$ un k-schéma algébrique, x un point rationnel, $\mathcal{O}_x$ l'anneau local associé, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$. On note $Tg(\mathcal{X})_x$ l'espace tangent de Zariski au point x . C'est, par définition, le k-schéma affine d'algèbre l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$ de la k-algèbre $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. L'ensemble $Tg(\mathcal{X})_x(k)$ de ses points rationnels, qui le caractérise, est un espace vectoriel identifié naturellement aux espaces vectoriels suivants

i. L'espace vectoriel dual de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ (c'est-à-dire $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k)$) ,

ii. L'espace vectoriel des k-dérivations de $\mathcal{O}_x$ à valeurs dans k (c'est-à-dire l'espace des applications k-linéaires $D: \mathcal{O}_x \to k$, telles que

$$D(f.g) = f(x)D(g) + g(x)D(f),\ f,g \in \mathcal{O}_x,\ f(x),\ g(x)$$

classes respectives de f et g dans le corps résiduel $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \simeq k$) ,

iii. L'espace vectoriel des morphismes de k-schéma $\mathrm{Spec}\, k[\varepsilon] \to \mathcal{X}$ qui envoient l'unique idéal maximal de l'algèbre $k[\varepsilon]$ sur le point x (c'est-à-dire

aussi l'ensemble des morphismes de k-algèbres locales $\mathcal{O}_x \to k[\varepsilon])$,

iv. L'espace vectoriel $\mathcal{X}(p)^{-1}(x) \subset \mathcal{X}(k[\varepsilon])$.

On note $Ctg(\mathcal{X})_x$ le cône des tangentes à $\mathcal{X}$ au point x . C'est, par définition, le k-schéma affine d'algèbre l'algèbre graduée $Gr(\mathcal{O}_x)$ associée à $\mathcal{O}_x$, c'est-à-dire

$$Gr\,\mathcal{O}_x = k \oplus \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_x^p/\mathfrak{m}_x^{p+1} \oplus \ldots$$

La surjection canonique $S(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) \to Gr\,\mathcal{O}_x \to 0$ permet d'identifier le cône des tangentes en x à un sous-schéma fermé de l'espace tangent en x . L'ensemble $Ctg(\mathcal{X})_x(k)$ des points rationnels du cône des tangentes est alors un cône de sommet l'origine dans l'espace tangent $Tg(\mathcal{X})_x(k)$. Nous aurons besoin d'une identification commode du cône des tangentes. On a la surjection

$$Spec(\mathcal{O}_x)(k[[T]]) \xrightarrow{\lambda} Spec(Gr\mathcal{O}_x)(k) \to 0$$

définie comme suit : soit $f: \mathcal{O}_x \to k[[T]]$ un morphisme et $\bar{x} \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ un élément de $Gr\,\mathcal{O}_x$; le morphisme λf est donné par la formule

$$\lambda(f)(\bar{x}) = \overline{f(x)},\ \overline{f(x)} \in T\,k[[T]]/(T^2) \simeq k\ ,$$

x représentant de $\bar{x}$ dans $\mathfrak{m}_x$. Deux morphismes f_1 et f_2 de $\mathcal{O}_x$ dans $k[[T]]$, tels que $\lambda(f_1) = \lambda(f_2)$ sont dits équivalents.

PROPOSITION 1. L'ensemble des points rationnels du cône des tangentes à $\mathcal{X}$ en x s'identifie à l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes $\mathcal{O}_x \to k[[T]]$ pour la relation précédente.

Remarque. On a l'inclusion $Ctg(\mathcal{X})_x(k) \subset Tg(\mathcal{X}_{red})_x(k)$ (car $f: \mathcal{O}_x \to k[[T]]$ s'annule sur les éléments nilpotents de $\mathcal{O}_x$) .

Profitons encore des notations pour rappeler un critère de lissité (cf. [3], I, 4,5,11). On dit que le schéma algébrique $\mathcal{X}$ est lisse au point rationnel x si le complété $\hat{\mathcal{O}}_x$ de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ pour la topologie $\mathfrak{m}_x$-adique est isomorphe à un anneau de séries formelles sur k. Géométriquement cela revient à dire que le cône des tangentes en x coïncide avec l'espace tangent de Zariski. D'après la proposition 1, pour que $\mathcal{X}$ soit lisse au point x, il faut et il suffit que pour tout vecteur tangent

$$f_1 : \mathcal{O}_x \to k[T]/(T^2)$$

il existe

$$f : \mathcal{O}_x \to k[[T]]$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_x & \xrightarrow{f} & k[[T]] \\ & \searrow^{f_1} & \downarrow \\ & & k[T]/(T^2) \end{array}$$

ou, ce qui est équivalent, qu'il existe une suite

$$f_m : \mathcal{O}_x \to k[T]/(T^{m+1}),\ m = 2,3,\ldots$$

telle que le diagramme suivant soit commutatif pour $m = 2,3,\ldots$

$$\begin{array}{ccc} & & k[T]/(T^{m+2}) \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{O}_x & \longrightarrow & k[T]/(T^{m+1}) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & k[T]/(T^2) \end{array}$$

On a donc :

PROPOSITION 2. *Le k-schéma algébrique $\mathcal{X}$ est lisse au point rationnel x si l'application*

$$\mathcal{X}(k[T]/(T^{m+1})) \to \mathcal{X}(k[T]/(T^m))$$

est surjective au point $x \in \mathcal{X}(k)$ pour $m = 1,2,\ldots$

2. LE SCHEMA DES ALGEBRES DE LIE.

a. Généralités. On définit le schéma $\mathfrak{L}_n$ des lois d'algèbre de Lie sur V de la façon suivante. Pour toute A-algèbre (commutative, unitaire) on note $\mathfrak{L}_n(A)$ l'ensemble des lois de A-algèbre de Lie sur $V \otimes A$ et pour tout morphisme $f:A \to B$, de k-algèbre on note $\mathfrak{L}_n(f)$ l'application qui à une loi $L_A \in \mathfrak{L}_n(A)$ de crochet $[\ ,\ ]_{L_A}$ associe la loi L_B, de B-algèbre de Lie sur $V \otimes B$, dont le crochet est donné par la formule

$$[x,y]_{L_B} = \sum_i f(\alpha_i) z_i, \quad x,y \in V$$

avec

$$[x,y]_{L_A} = \sum_i \alpha_i z_i, \quad \alpha_i \in A, \quad z_i \in V .$$

La donnée d'une base de V, soit $\{e_i, i = 1,2,\ldots,n\}$, permet de définir une loi L_A sur $V \otimes A$ par des constantes de structure données par la formule

$$[e_i,e_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} e_k , \quad a_{ijk} \in A$$

et vérifiant les conditions polynomiales

$$a_{ijl} + a_{jil} = 0 , \quad i, j, l = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

(le crochet est antisymétrique)

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{O}(i,j,l)} \sum_{m=1}^{n} a_{\sigma j,\sigma l,m}\, a_{\sigma i,m,p} = 0, i,j,l,p = 1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

(condition de Jacobi).

Si $f:A \to B$ est un morphisme de k-algèbres, alors les constantes de structure de la loi L_B, image par $\mathfrak{L}_n(f)$ de la loi L_A, sont les images par f de celles de L_A. On peut donc énoncer :

PROPOSITION 3. Le foncteur $\mathfrak{L}_n$ est un k-schéma algébrique affine.

En effet, si I_n désigne l'idéal de l'anneau des polynômes $k[X_{i,j,l}]$ $i,j,l = 1,2,\ldots,n$ engendré par les relations (1) et (2), la donnée d'une loi de A-algèbre de Lie sur $V \otimes A$ équivaut à celle d'un morphisme de k-algèbres

$$k[X_{i,j,l}]/I_n \to A \ .$$

Afin de simplifier les écritures nous noterons $\mathcal{L}_n$ aussi bien le k-foncteur précédemment défini que son espace géométrique associé et nous appellerons toute k-algèbre de Lie, plus brièvement, algèbre de Lie.

Remarque. Le schéma $\mathcal{L}_n$ est un sous-schéma fermé du schéma des lois d'algèbre sur V . Il est défini par les relations identiques

$$[x,x] = 0 \ , \quad x \in V$$

$$[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0 \ , \quad x,y,z \in V$$

qui sont équivalentes aux relations (1) et (2) entre les constantes de structure dans une base de V fixée. L'espace tangent, en un point rationnel au schéma des lois d'algèbre, est isomorphe à $\mathrm{Hom}(V \otimes V,V)$. Un des problèmes à résoudre est de caractériser les éléments de $\mathrm{Hom}(V \otimes V,V)$ qui, en un point $[L]$ d'algèbre de Lie L , appartiennent au schéma tangent à $\mathcal{L}_n$. Nous verrons d'autres exemples de sous-schémas fermés définis par des relations identiques (algèbres de Lie résolubles, nilpotentes) et nous chercherons de même à en caractériser les vecteurs tangents.

b. Espace tangent. Soit $[L]$ un point rationnel de $\mathcal{L}_n$, d'algèbre de Lie L sur V . D'après la caractérisation (iv), l'espace tangent de Zariski, $\mathrm{Tg}(\mathcal{L}_n)_{[L]}(k)$ est l'ensemble des lois de $k[\varepsilon]$-algèbre de Lie sur $V \otimes k[\varepsilon]$ qui induisent, par réduction modulo (ε) , la loi L sur V . Soit L_1 un vecteur tangent. L'algèbre de Lie $L_{1,k}$ est extension à noyau commutatif εV de L . On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \varepsilon V \longrightarrow L_{1,k} \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$$

$$v_1 + \varepsilon v_2 \longmapsto v_1$$

et la structure de L-module induite par l'extension sur εV est la structure adjointe. Soit $f \in Z^2(L,L)$ le deux-cocycle associé à la section privilégiée σ de π définie par $\sigma(1) = 1 \otimes 1$ (chapitre 1, § 1). On définit ainsi une application linéaire et bijective de $Tg(\mathcal{L}_n)_{[L]}(k)$ sur $Z^2(L,L)$. D'où la

PROPOSITION 4. L'espace tangent de Zariski au point d'algèbre de Lie L de $\mathcal{L}_n$ est naturellement isomorphe à l'espace vectoriel $Z^2(L,L)$ des deux-cocycles de L à valeurs dans le module adjoint.

c. Un critère de lissité. D'après la proposition 2 pour pouvoir conclure à la lissité du schéma $\mathcal{L}_n$ au point rationnel d'algèbre de Lie L il suffit de montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$ et pour toute loi L_m de $k[T]/(T^{m+1})$-algèbre de Lie sur $V \otimes k[T]/(T^{m+1})$ induisant la loi L par réduction modulo (T) , il existe une loi L_{m+1} de $k[T]/(T^{m+2})$-algèbre de Lie sur $V \otimes k[T]/(T^{m+2})$ induisant la loi L_m par réduction modulo (T^{m+1}) . On pose $A = k[T]/(T^{m+2})$, $\mathfrak{m} = TA$, $\mathfrak{i} = T^m A$, $\mathfrak{j} = T^{m+1} A$. On a

$$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{i} \supset \mathfrak{j} \ , \quad \mathfrak{m}\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j} \ , \quad A/\mathfrak{m} \simeq k \ .$$

Soit alors L_m défini comme ci-dessus. Son obstruction $Obs(L_m)$, qui lui est associée par la construction du chapitre 2, théorème 1, est un élément de $H^3_e(L,L)$ et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une loi L_{m+1} répondant aux conditions précédentes est que $Obs(L_m) = 0$; d'où le critère :

THEOREME 1. Une condition suffisante pour que le schéma $\mathcal{L}_n$ soit lisse au point rationnel d'algèbre de Lie L est donnée par : $H^3_e(L,L) = 0$.

Reprenons maintenant ce qui précède dans le cas particulier $m = 1$. A chaque élément $L_1 \in Tg(\mathcal{L}_n)_{[L]}(k)$ on associe donc $Obs(L_1) \in H^3_e(L,L)$, c'est-à-dire, d'après la proposition 4, qu'on définit une application

$$\tilde{\Theta} : Z^2(L,L) \to H^3_e(L,L) \ .$$

Cette application se factorise d'ailleurs à travers $H^2(L,L)$ car l'obstruction ne dépend pas des sections choisies (chapitre 1, proposition 4). En fait soit $f \in Z^2(L,L)$, alors un représentant de $\tilde{\Theta}(f)$ dans $Z^3(L,L)$ est le trois-cycle Φ donné par la formule

$$\Phi(l,l',l'') = l.f(l',l'')-l'.f(l,l'')+l''.f(l,l'),l,l',l'' \in L .$$

L'application $\Theta : H^2(L,L) \to H^3_e(L,L)$ induite par $\tilde{\Theta}$ n'est autre que l'application quadratique Sq de Rim définie dans [20], d'où :

THEOREME 2. On a la factorisation

$$\begin{array}{ccc} H^2(L,L) & \xrightarrow{\quad Sq \quad} & H^3(L,L) \\ & \searrow^{\Theta} \quad \nearrow & \\ & H^3_e(L,L) & \end{array}$$

d. Opération de GL_n sur $\mathcal{L}_n$. Orbite. Le groupe linéaire GL_n opère de la façon suivante sur le schéma $\mathcal{L}_n$. Soient A une k-algèbre commutative, $L_A \in \mathcal{L}_n(A)$ une loi de A-algèbre de Lie sur $V \otimes A$ de crochet φ_A et $g_A \in GL_n(A)$ un automorphisme de $V \otimes A$; alors $g_A * L_A$ est la loi de A-algèbre de Lie sur $V \otimes A$ dont le crochet ψ_A est défini par la formule

$$\psi_A(v,w) = g_A(\varphi_A(g_A^{-1}(v), g_A^{-1}(w))), \quad v,w \in V \otimes A .$$

On note Ω_L l'orbite de l'algèbre de Lie $L \in \mathcal{L}_n(k)$ sous l'action de GL_n muni de sa structure de schéma réduit induit (cf. [3], III, 5,3). L'ensemble $\Omega_L(k)$ de ses points rationnels est le sous-ensemble de $\mathcal{L}_n(k)$ formé des algèbres de Lie isomorphes à L. Déterminons l'espace tangent de Zariski au point [L] de Ω_L. Comme quotient de GL_n par le stabilisateur, Stab L, de L, Ω_L est un sous-schéma lisse de $\mathcal{L}_n$. De plus comme k est de caractéristique zéro Stab L est un sous-groupe lisse (théorème de Cartier, cf. par exemple [3],III,6,1) et le morphisme $GL_n \xrightarrow{*} \Omega_L$, $g \mapsto g * L$, est lisse. L'application tangente est donc surjective. Il reste donc à déterminer l'image par le morphisme $*$ de l'algèbre de Lie de

GL_n dans $Tg(\mathcal{L}_n)_L(k)$. Soient

$$Id+\varepsilon h,\ \varepsilon^2 = 0,\ h \in Hom_k(V,V)\ ,$$

un élément de Lie $(GL_n(k))$ et φ le crochet de L . On a

$$(Id+\varepsilon h)(\varphi((id+\varepsilon h)^{-1}(v), (Id+\varepsilon h)^{-1}(w))) = \varphi(v,w) + \varepsilon dh(v,w),$$

$$dh(v,w) = \varphi(v,h(w)) - \varphi(w,h(v)) - h(\varphi(v,w)),\ v,w \in V\ ;$$

d'où la

PROPOSITION 5. L'espace tangent de Zariski, $Tg(\Omega_L)_{[L]}(k)$ est isomorphe à l'espace vectoriel $B^2(L,L)$ des deux-cobords de L à valeurs dans le module adjoint.

Maintenant, de la démonstration du critère de lissité (théorème 1), il découle que si l'application Θ est injective alors

$$Ctg(\mathcal{L}_n)_{[L]}(k) = Tg(\Omega_L)_{[L]}(k)$$

(car seules les vecteurs tangents appartenant à $B^2(L,L)$ se relèvent).

Comme d'autre part on a l'inclusion

$$Ctg(\mathcal{L}_n)_{[L]}(k) \subset Tg(\mathcal{L}_{n,red})_{[L]}(k)\ ,$$

on déduit le

THEOREME 3. Si $\Theta : H^2(L,L) \to H^3_e(L,L)$ est injective, l'orbite Ω_L est un sous-schéma ouvert de $\mathcal{L}_n$, de plus si

i. $H^2(L,L) = 0$ alors $\mathcal{L}_n$ est lisse au point $[L]$,

ii. $H^2(L,L) \neq 0$ alors $\mathcal{L}_n$ n'est pas réduit au point $[L]$,

car la condition $H^2(L,L) = 0$ implique $Tg(\mathcal{L}_n)_{[L]} = Tg(\Omega_L)_{[L]}$ et la condition $H^2(L,L) \neq 0$ implique $Tg(\mathcal{L}_n)_{[L]} \neq Tg(\Omega_L)_{[L]}$.

Un exemple d'algèbre de Lie vérifiant l'hypothèse du théorème 3 et sa condition (ii) permet de montrer que le schéma des algèbres de Lie n'est pas réduit (cf. chapitre IV). Signalons encore, à côté des exemples traditionnels (cf. [16]) d'algèbres de Lie à orbite ouverte (algèbres semi-simples, algèbres à radical de dimension un) que l'algèbre de Lie résoluble de dimension 2n, produit direct de n exemplaires de l'algèbre de Lie résoluble de dimension 2 (en dimension 2 il y a, à isomorphisme près, une seule algèbre non abélienne ; cette algèbre, résoluble et complète (cf. [11],I,3)), vérifie la condition (i) du théorème 3. (le calcul du H^2 pour cette algèbre peut se faire directement sans difficulté, on l'obtient aussi très facilement en utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre relative à un idéal [8]). Son orbite est donc ouverte.

3. LES SOUS-SCHEMAS DES ALGEBRES DE LIE NILPOTENTES ET RESOLUBLES.

Nous allons maintenant caractériser les cocycles tangents à certains sous-schémas fermés de $\mathfrak{L}_n$ définis par des relations identiques. La définition par récurrence de ces relations va donner naissance, en chaque point rationnel, à une filtration de la cohomologie de l'algèbre associée. A chaque sous-espace de la filtration va correspondre un espace tangent.

Rappelons que la suite centrale descendante d'une algèbre de Lie M est définie par les relations de récurrence

$$C^0(M) = M, \quad C^p(M) = [C^{p-1}(M), M], \quad p = 1,2,\ldots$$

On dit que M est nilpotente (resp. résoluble) de hauteur $\leqslant p$ si $C^p(M) = 0$ (resp. $C^{p-1}(C^1(M)) = 0$) . Dans le cas où le module sous-jacent à M est libre de rang fini sur l'anneau de base, ces relations identiques sont équivalentes à des relations polynomiales entre les constantes de structure de M dans une base fixée. Si, de plus, l'anneau de base est un corps il y a équivalence entre (M est nilpotente de hauteur $\leqslant \dim M-1$) et (M est nilpotente). Enfin, si on ajoute que la caractéristique du corps est nulle alors, d'après une caractérisation bien connue

des algèbres de Lie résolubles, il y a équivalence entre (M est résoluble de hauteur $\leqslant \dim M-1$) et (M est résoluble).

Pour toute k-algèbre A on note $\mathcal{N}_n^p(A)$ (resp. $\mathcal{R}_n^p(A)$) le sous-ensemble de $\mathcal{L}_n(A)$ formé des lois de A-algèbres de Lie sur $V \otimes A$ qui sont nilpotentes (resp. résolubles) de hauteur $\leqslant p$. On définit ainsi des sous-schémas fermés $\mathcal{N}_n^p$ et $\mathcal{R}_n^p$, $p = 1,2,\ldots$ du schéma $\mathcal{L}_n$ des algèbres de Lie. Ces sous-schémas sont stables par la restriction de l'opération du groupe linéaire sur $\mathcal{L}_n$. Pour $p = n-1$, $\mathcal{N}_n^{n-1}$ (resp. $\mathcal{R}_n^{n-1}$) est appelé le schéma des algèbres de Lie nilpotentes (resp. résolubles) et est noté plus simplement $\mathcal{N}_n$ (resp. $\mathcal{R}_n$).

Soit [L] un point rationnel de $\mathcal{N}_n^p$ (resp. $\mathcal{R}_n^p$) d'algèbre de Lie L. On désignera par L_1 un élément de l'espace tangent $Tg(\mathcal{L}_n)_{[L]}(k)$ au point [L] et par f le deux-cocycle associé. Pour que L_1 soit nilpotente (resp. résoluble) de hauteur $\leqslant p$ il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $L_{1,k}$. C'est une conséquence des propriétés du changement d'anneau de base.

a. Cas des algèbres nilpotentes [26]. Filtrons la cohomologie de L à valeurs dans le module adjoint. L'algèbre L est filtrée par la suite centrale descendante ; on pose

$$V_p = L \text{ pour } p \leqslant 1 , \quad V_p = C^{p-1}(L) \text{ pour } p > 1 .$$

Le module adjoint est filtré par la suite centrale ascendante ; on pose

$$W_p = 0 \text{ pour } p > 0 ,$$

$$W_p = C_{-p+1}(L) = \{m \in L, \ V_1^{-p+1} m = C\} \text{ pour } p \leqslant 0 .$$

On a bien la relation

$$V_p W_q \subset W_{p+q} , \quad p,q \in \mathbb{Z} .$$

On en déduit une filtration du complexe de cohomologie. En particulier le deuxième groupe, $H^2(L,L)$ est filtré par les sous-espaces

$H_p^2(L,L) = \{\bar{g} \in H^2(L,L)$, il existe $g \in Z^2(L,L)$ représentant de $\bar{g}$ tel que $g(V_i,V_j) \subset W_{i+j+p}\}$.

PROPOSITION 6. Il y a équivalence entre

L_1 est nilpotente de hauteur $\leqslant p$

et

L est nilpotente de hauteur $\leqslant p$ et $f \in H_{-p}^2(L,L)$.

En effet, si L_1 est nilpotente de hauteur $\leqslant p$, il en est bien sûr de même de L . De plus en choisissant une section σ' de $\pi: L_{1,k} \to L$, telle que

$$\sigma'(C^i(L)) \subset C^i(L_{1,k}) ,$$

on voit que le deux-cocycle f' associé à σ' et défini par la relation

$$\varepsilon f'(x_1,x_2) = [\sigma'(x_1),\sigma'(x_2)]_{L_{1,k}} - \sigma'([x_1,x_2]_L),\ x_1,\ x_2 \in L$$

vérifie la condition

$$f'(V_i,V_j) \subset W_{i+j+p} .$$

Comme f' est équivalent à f , modulo $B^2(L,L)$, cela termine une partie de la démonstration.

Réciproque. Pour toute algèbre de Lie M soit $\varpi_{p,M} : \bigotimes_{p+1} M \to M$ l'application définie par les relations de récurrence

$$\varpi_{1,M}(x_1,x_2) = [x_1,x_2]_M ,\ x_1,\ x_2 \in M ,$$

$$\varpi_{p,M}(x_1,\ldots,x_{p+1}) = \varpi_{1,M}(\varpi_{p-1,M}(x_1,\ldots,x_p),\ x_{p+1}),\ x_1,\ldots,x_{p+1} \in M .$$

La condition (M nilpotente de hauteur $\leqslant p$) se traduit alors par ($\varpi_{p,M} = 0$). Soit $\varphi_p : \bigotimes_{p+1} L \to L$ l'application définie par les relations

$$\varphi_1(x_1,x_2) = f(x_1,x_2),\ x_1,\ x_2 \in V ,$$

$$\varphi_p(x_1,x_2,\ldots,x_{p+1}) = f(\varpi_{p-1,L}(x_1,\ldots,x_p),\ x_{p+1}) + \varpi_{1,L}(\varphi_{p-1}(x_1,\ldots,x_p),\ x_{p+1})\ x_1,\ldots,x_{p+1} \in V .$$

On a alors les deux relations

$$\varpi_{p,L_1}(x_1,\dots,x_{p+1}) = \varpi_{p,L}(x_1,\dots,x_{p+1}) + \varepsilon\varphi_p(x_1,\dots,x_{p+1}),\ x_1,\dots,x_{p+1} \in V,$$

$$\varpi_{p,L_1}(x_1+\varepsilon x'_1,\dots,x_{p+1}+\varepsilon x'_{p+1}) - \varpi_{p,L_1}(x_1,\dots,x_{p+1}) \in \varepsilon V_{p+1},$$

$$x_1, x'_1,\dots,x_{p+1}, x'_{p+1} \in V,$$

à partir desquelles on établit immédiatement la réciproque.

PROPOSITION 7. L'espace tangent $Tg(\mathscr{N}_n^p)_{[L]}(k)$ au point rationnel $[L]$, correspondant à l'algèbre de Lie L nilpotente de hauteur $\leqslant p$, est isomorphe au sous-espace vectoriel formé des deux-cocycles $g \in Z^2(L,L)$ tels que $\bar{g} \in H^2_{-p}(L,L)$.

COROLLAIRE. Si L est nilpotente de hauteur $\leqslant p$ et si $H^2_{-p}(L,L) = 0$ alors l'orbite Ω_L de L est un sous-schéma ouverte de $\mathscr{N}_n^p$.

On en déduit en particulier :

THEOREME 4. L'espace tangent de Zariski au point rationnel du schéma $\mathscr{N}_n$ correspondant à l'algèbre de Lie nilpotente L est isomorphe au sous-espace vectoriel formé des deux-cocycles $g \in Z^2(L,L)$ tels que $\bar{g} \in H^2_{-n+1}(L,L)$ et si $H^2_{-n+1}(L,L) = 0$ alors l'orbite Ω_L est un sous-schéma ouvert de $\mathscr{N}_n$.

b. Cas des algèbres résolubles [18]. On utilise les filtrations suivantes. L'algèbre L est filtrée par les sous-espaces

$$V_p = L \quad \text{pour} \quad p \leqslant 0,$$

$$V_1 = [L,L], \quad V_p = [V_1, V_{p-1}], \quad p = 2,3,\dots,$$

et le module adjoint par les sous-espaces

$$W_p = 0 \quad \text{si} \quad p > 0,$$

$$W_p = \{m \in L,\ V_p^{-p+1}.m = 0\}, \quad p = 0,1,\dots$$

On a la relation

$$V_p . W_q \subset W_{p+q} .$$

D'où une filtration du complexe de cohomologie. En particulier $H^2(L,L)$ est filtré par les sous-espaces

$$H^2_p(L,L) = \{\bar{g} \in H^2(L,L) \text{ , il existe un représentant } g \in Z^2(L,L) \text{ de } \bar{g} \text{ tel que } g(V_i,V_j) \subset W_{i+j+p} .$$

Soit $RH^2_p(L,L)$ le sous-espace de $H^2_p(L,L)$ formé des classes $\bar{g}$ pour lesquelles le représentant ad-hoc g vérifie la condition supplémentaire

$$g(V_o,V_o) \subset W_{-p+2} .$$

PROPOSITION 8. Il y a équivalence entre

L_1 est résoluble de hauteur $\leqslant p$

et

L est résoluble de hauteur $\leqslant p$ et $\bar{f} \in RH^2_{1-p}(L,L)$.

La démonstration est analogue à celle du cas nilpotent, seules les écritures sont plus longues. La partie directe est la même. Pour la réciproque on pose, pour toute algèbre de Lie M ,

$$\varpi_{1,M}(x_1,y_1) = [x_1,y_1]_M \text{ , } x_1, y_1 \in M ,$$

$$\varpi_{p,M}(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_p) = \varpi_{1,M}(\omega_{p-1,M}(x_1,\dots,x_{p-1},y_1,\dots,y_{p-1}),\varpi_{1,M}(x_p,y_p))$$

$$x_1,y_1,\dots,x_p,y_p \in M,\ p = 2,3,\dots .$$

La condition pour que M soit résoluble de hauteur $\leqslant p$ est alors $\varpi_{p,M} = 0$.

On pose aussi

$$\varphi_1(x_1,y_1) = f(x_1,y_1),\ x_1,\ y_1 \in V\ ,$$

$$\varphi_p(x_1,y_1,\dots,x_p,y_p) = f(\varpi_{p-1,L}(x_1,y_1,\dots,x_{p-1},y_{p-1}),\ \varpi_{1,L}(x_p,y_p))$$
$$+ \varpi_{1,L}(\varpi_{p-1,L}(x_1,y_1,\dots,x_{p-1},y_{p-1}),\ f(x_p,y_p))$$
$$+ \varpi_{1,L}(\varphi_{p-1}(x_1,y_1,\dots,x_{p-1},y_{p-1}),\ \varpi_1(x_p,y_p)),$$
$$x_1,y_1,\dots,x_p,y_p \in V,\quad p = 2,3,\dots\ .$$

On a alors les relations

$$\varpi_{p,L_1}(x_1,y_1,\dots,x_p,y_p) = \varpi_{p,L}(x_1,y_1,\dots,x_p,y_p)$$
$$+ \varepsilon\varphi_p(x_1,y_1,\dots,x_p,y_p)\ x_1,y_1,\dots,x_p,y_p \in V\ ,$$

$$\varpi_{p,L_1}(x_1+\varepsilon x_1',y_1+\varepsilon y_1',\dots,x_p+\varepsilon x_p',y_p+\varepsilon y_p') - \varpi_{p,L_1}(x_1,y_1,\dots,x_p,y_p) \in \varepsilon V_p$$
$$x_1,x_1',y_1,y_1',\dots,x_p,x_p',y_p,y_p' \in V\ ,$$

et on termine comme plus haut.

PROPOSITION 9. L'espace tangent $Tg(\mathcal{R}_n^p)_{[L]}(k)$ au point rationnel $[L]$ correspondant à l'algèbre de Lie résoluble L de hauteur $\leqslant p$, est isomorphe au sous-espace vectoriel formé des deux-cocycles $g \in Z^2(L,L)$ tels que $\bar{g} \in RH^2_{1-p}(L,L)$.

COROLLAIRE. Si L est résoluble de hauteur $\leqslant p$ et si $RH^2_{1-p}(L,L) = 0$ alors l'orbite Ω_L de L est un sous-schéma ouvert de $\mathcal{R}_n^p$.

On en déduit en particulier :

THEOREME 5. L'espace tangent de Zariski au point rationnel $[L]$ du schéma $\mathcal{R}_n$ correspondant à l'algèbre de Lie résoluble L est isomorphe au sous-espace vectoriel formé des deux-cocycles $g \in Z^2(L,L)$ tels que $\bar{g} \in RH^2_{-n+2}(L,L)$ et si $RH^2_{-n+2}(L,L) = 0$ alors l'orbite Ω_L est un sous-schéma ouvert de $\mathcal{R}_n$.

4. LE SCHEMA DES ALGEBRES DE LIE ET DES MORPHISMES.

Nous en venons maintenant à la définition du schéma des algèbres de Lie et des morphismes. Pour toute k-algèbre A on note $\mathcal{M}_{n',n''}(A)$ l'ensemble des triplets (L'^A, L''^A, ρ^A) où L'^A et L''^A sont des éléments de $\mathcal{L}_{n'}(A)$ et $\mathcal{L}_{n''}(A)$ respectivement et $\rho^A : L'^A \to L''^A$ un morphisme de A-algèbres de Lie. Pour tout morphisme de k-algèbre $f : A \to B$ on note

$$\mathcal{M}_{n',n''}(f) : \mathcal{M}_{n',n''}(A) \to \mathcal{M}_{n',n''}(B)$$

l'application produit $\mathcal{L}_{n'}(f) \times \mathcal{L}_{n''}(f) \times \rho(f)$ où $\rho(f) : V' \otimes B \to V'' \otimes B$ est l'application naturelle induite par f . Si $\{e'_i, i = 1,2,\ldots,n'\}$ et $\{e''_i, i = 1,2,\ldots,n''\}$ sont deux bases de V' et V'' respectivement, un élément $(L'^A, L''^A, \rho^A) \in \mathcal{M}_{n',n''}(A)$ est défini par des constantes de structures

$$[e'_i, e'_j] = \sum_{k=1}^{n'} a'_{ijk} e'_k \ , \quad a'_{ijk} \in A, \quad i,j = 1,2,\ldots,n' \ ,$$

$$[e''_i, e''_j] = \sum_{k=1}^{n''} a''_{ijk} e''_k \ , \quad a''_{ijk} \in A \ , \ i,j = 1,2,\ldots,n'' \ ,$$

$$\rho^A(e'_i) = \sum_{j=1}^{n''} a_{ij} e''_j \ , \quad a_{ij} \in A \ , \ i = 1,2,\ldots,n' \ .$$

Toutes ces constantes de structure sont assujetties à des conditions polynomiales. D'où un k-foncteur $\mathcal{M}_{n',n''}$ algébrique et affine.

a. Un critère de lissité. Commençons par déterminer l'espace tangent de Zariski en un point rationnel $M = (L', L'', \rho) \in \mathcal{M}_{n',n''}(k)$. Pour que

$$M_1 = (L'_1, L''_2, \rho_1) \in \mathcal{M}_{n',n''}(k[\varepsilon])$$

soit un vecteur tangent il faut et il suffit que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \varepsilon V' & \to & L'_{1,k} & \to L' & \to 0 \\ & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho_{1,k} & \downarrow \rho & \\ 0 & \to & \varepsilon V'' & \to & L''_{1,k} & \to L'' & \to 0 \ . \end{array}$$

D'après le théorème 2 du chapitre précédent cela se traduit par la condition nécessaire et suffisante sur les cocycles f' et f'' associés respectivement à L'_1 et L''_1

$$\rho \circ f' - f''(\rho,\rho) \in B^2(L',L'') .$$

On pose

$$T(L',L'',\rho) = \{(f',f'') \in Z^2(L',L') \times Z^2(L'',L''),\ \rho f' - f''(\rho,\rho) \in B^2(L,L)\}.$$

On en déduit, compte tenu du théorème 2,b, (chapitre 2) :

PROPOSITION 10. L'espace tangent de Zariski au point rationnel $M = (L',L'',\rho)$ de $\mathscr{M}_{n',n''}$ est isomorphe à

$$T(L',L'',\rho) \times Z^1(L',L'') .$$

COROLLAIRE. Si $H^2(L',L'') = 0$ alors

i. $T(L',L'',\rho) = Z^2(L',L') \times Z^2(L'',L'')$

ii. $\mathrm{Ctg}(\mathscr{M}_{n',n''})_M(k) = \mathrm{Ctg}(\mathscr{L}_{n'})_{[L']}(k) \times \mathrm{Ctg}(\mathscr{L}_{n''})_{[L'']}(k) \times Z^1(L',L'')$.

Avec l'hypothèse du corollaire on voit que si, de plus, $\mathscr{L}_{n'}$ et $\mathscr{L}_{n''}$ sont lisses aux points L' et L'' respectivement il en sera de même de $\mathscr{M}_{n',n''}$ au point M. En particulier on a :

THEOREME 6. Si $H^3_e(L',L') = H^3_e(L'',L'') = H^2(L',L'') = 0$ alors $\mathscr{M}_{n',n''}$ est lisse au point rationnel $M = (L',L'',\rho)$.

b. Sous-schémas fermés. Soit $\mathscr{M}_{L',n''}$ (resp. $\mathscr{M}_{n',L''}$) le sous-schéma fermé de $\mathscr{M}_{n',n''}$ obtenu en fixant une algèbre de Lie. Plus précisément soit L' (resp. L'') une loi d'algèbre de Lie sur V' (resp. V''). On pose pour toute k-algèbre A

$$\mathscr{M}_{L',n''}(A) = \{(L' \otimes A,\ L''^A,\ \rho^A),\ L''^A \in \mathscr{L}_{n''}(A),\ \rho^A : L' \otimes A \to L''^A\}$$

$$(\text{resp. } \mathscr{M}_{n',L''}(A) = \{(L'^A,\ L'' \otimes A,\ \rho^A),\ L'^A \in \mathscr{L}_{n'}(A),\ \rho^A : L'^A \to L'' \otimes A\}) .$$

On note $T_{L'}$ (resp. $T_{L''}$) le sous-espace de $T(L',L'',\rho)$ formé des couples $(0,f'')$ (resp. $(f',0)$). On a alors les résultats suivants corollaires de ceux qui précèdent.

PROPOSITION 11. L'espace tangent de Zariski au point rationnel $M = (L',L'',\rho)$ de $\mathcal{M}_{L',n''}$ (resp. $\mathcal{M}_{n',L''}$) est isomorphe à

$$T_{L'} \times Z^1(L',L'') \quad (\text{resp. } T_{L''} \times Z^1(L',L'')) .$$

COROLLAIRE. Si $H^2(L',L'') = 0$ alors

i. $T_{L'} = Z^2(L'',L'')$ (resp. $T_{L''} = Z^2(L',L')$) ,

ii. $\mathrm{Ctg}(\mathcal{M}_{L',n''})_M(k) = \mathrm{Ctg}(\mathcal{L}_{n''})_{[L'']}(k) \times Z^1(L',L'')$

(resp. $\mathrm{Ctg}(\mathcal{M}_{n',L''})_M(k) \simeq \mathrm{Ctg}(\mathcal{L}_{n'})_{[L']}(k) \times Z^1(L',L'')$).

THEOREME 7. Si $H^2(L',L'') = 0$ et si $H^3_e(L'',L'') = 0$ (resp. $H^3_e(L',L')=0$) alors $\mathcal{M}_{L',n''}$ (resp. $\mathcal{M}_{n',L''}$) est lisse au point rationnel $M = (L',L'',\rho)$.

Nous verrons dans le chapitre suivant une situation où les hypothèses du théorème 7 sont satisfaites.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS.

Dans ce dernier chapitre, nous présentons deux calculs de groupes de cohomologie. Le premier conduit, en application au théorème 3 du chapitre précédent, à un exemple de point rationnel du schéma $\mathcal{L}_{18+4q}$, $q = 0,1,\ldots,$ où ce dernier n'est pas réduit. Le deuxième calcul montre que le point rationnel $(L,gl_5(\mathbb{R}),\rho)$ du schéma des algèbres de Lie et des morphismes, où L désigne l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré et ρ la représentation induite par la représentation naturelle du groupe de Lorentz (son opération sur $\mathbb{R}^4$), est un point lisse. Ce qui explique l'absence d'obstruction au relèvement du morphisme ρ le long d'une déformation quelconque de l'algèbre L .

1. SUR L'IDEAL DES RELATIONS DE JACOBI.

Soit L l'algèbre de Lie, extension à radical commutatif R de l'algèbre simple $sl(2)$ et où R , muni de la structure de $sl(2)$-module induite par l'extension, est irréductible. On a alors :

PROPOSITION 1.

i. Si $\dim L = 2q+1$, $q = 2,3,\ldots$ ou $\dim L = 4q$, $q = 3,4,\ldots$ alors $H^2(L,L) = 0$,

ii. Si $\dim L = 4q+2$, $q = 4,5,\ldots$ ou $\dim L = 6,8,10,14$ alors $\dim H^2(L,L) = 1$,

iii. Si $\dim L = 4q+2$, $q = 4,5,\ldots$ alors l'application $\Theta: H^2(L,L) \to H^3_e(L,L)$ est injective,

iv. Si $\dim L = 6,8,10,14$ alors $H^3(L,L) = 0$.

Avant d'indiquer la démonstration donnons d'abord des corollaires, compte tenu du théorème 3 précité.

COROLLAIRE 1. L'orbite Ω_L de L est ouverte dans $\mathcal{L}_n$ dès que $n = \dim L$ est différent de 6,8,10 et 14.

On trouvera dans [21] une autre démonstration de ce corollaire basée sur certains résultats de Kostant.

COROLLAIRE 2. Pour dim L = 6,8,10 et 14 l'orbite de L dans $\mathcal{L}_n$ est adhérente à l'orbite des algèbres de Lie semi-simple de type respectif $A_1 \oplus A_1$, A_2, B_2 et G_2 .

COROLLAIRE 3. Pour $n = 18+4q$, $q = 0,1,\ldots$ l'idéal des relations de Jacobi n'est pas réduit.

Ce dernier résultat est une réponse au problème de Dixmier.

Démonstration de la proposition.

a. Rappels. Soient M une algèbre de Lie de radical N, $M = N \oplus S$ une décomposition de Lévi et V un M-module de dimension finie. On a les deux formules suivantes conséquentes des théorèmes 11 et 13 de Hochschild et Serre [8].

$$\alpha. \quad H^n(M,V) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^i(S,k) \otimes H^j(N,V)^M ,$$

$$\beta. \quad H^i(S,\mathrm{Hom}_k(\textstyle\bigwedge^j N,V) \simeq H^i(S,k) \otimes \mathrm{Hom}_k(\bigwedge^j N,V)^S .$$

On en déduit, si N est commutative et opère trivialement sur V , la formule

$$\gamma. \quad H^n(M,V) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^i(S,\mathrm{Hom}_k(\textstyle\bigwedge^j N,V)) .$$

En effet, on a toujours, puisque N opère trivialement sur sa cohomologie

$$H^j(N,V)^M = H^j(N,V)^S ;$$

d'autre part, puisque N est abélien et opère trivialement sur V , on a aussi

$$H^j(N,V) \simeq \mathrm{Hom}_k(\textstyle\bigwedge^j N,V) .$$

D'où la formule γ . Maintenant on a aussi la suite exacte de M-modules

$$0 \to N \to M \to S \to 0 .$$

En lui appliquant la suite exacte de cohomologie et en utilisant γ on obtient la suite exacte

$$\begin{aligned} \delta .\ \ & \mathrm{Hom}_S(N,S) \to \mathrm{Hom}_2(\overset{2}{\Lambda}N,N) \to H^2(M,M) \to \mathrm{Hom}_S(\overset{2}{\Lambda}N,S) \\ & \to \mathrm{Hom}_S(\overset{3}{\Lambda}N,N) \oplus H^3(S,N) \to H^3(M,M) \to \mathrm{Hom}_S(\overset{3}{\Lambda}N,S) \\ & \to \mathrm{Hom}_S(\overset{4}{\Lambda}N,N) \oplus H^4(S,N) \oplus H^3(S,\mathrm{Hom}_k(N,N)) . \end{aligned}$$

On retrouve ici, quand $\dim N = 1$, un des exemples d'algèbre à orbite ouverte précédemment cité. En effet, on a alors

$$\mathrm{Hom}_S(\overset{2}{\Lambda}N,N) = \mathrm{Hom}_S(\overset{2}{\Lambda}N,S) = 0 ,$$

d'où $H^2(M,M) = 0$. Ce qui démontre en particulier la proposition dans le cas $\dim L = 4$. Pour la suite on supposera donc $\dim L > 4$.

Nous aurons aussi besoin d'une base convenable de $sl(2)$ et de R . Nous utiliserons les bases standards (cf. [25], chapitre 2) qui font bien apparaître le caractère irréductible du $sl(2)$-module N ; à savoir

i. Pour $sl(2)$: h, x, y avec

$$[h,x] = 2x,\ [h,y] = -2y,\ [x,y] = h .$$

ii. Pour R : $u_0, u_1 \ldots u_{n-4}$ avec $n = \dim L$ et

$$h * u_i = (n-4-2i)u_i$$

$$x * u_i = (n-3-i)u_{i-1}$$

$$y * u_i = (i+1)u_{i+1},\quad i = 0,1,\ldots,n-4 .$$

b. <u>Démonstration.</u> Mis à part le cas $\dim L = 6$, la suite exacte δ devient, puisque R est irréductible, la suite exacte

$$\delta'.\quad 0 \to \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda}R,R) \to H^2(L,L) \to \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda}R,sl(2)) \to$$

$$\mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda}R,R) \to H^3(L,L) \to \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda}R,S) \to$$

$$\mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{4}{\Lambda}R,R) \oplus H^3(S, \mathrm{Hom}_k(R,R)) .$$

Maintenant si m est le poids dominant de R, comme $sl(2)$-module, alors $\overset{2}{\Lambda}R$ est un $sl(2)$-module somme directe de $sl(2)$-sous-modules irréductibles de poids dominants $2(m-1)-4i$, $i = 0,1,\ldots$. On en déduit

$$\dim \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda}R,\ sl(2)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim R = 2p,\ p = 1,2,\ldots \\ 1 & \text{si } \dim R = 2p+1,\ p = 1,2,\ldots \end{cases}$$

avec, dans le deuxième cas, comme vecteur de base, l'application bilinéaire alternée définie par les formules

$$f(u_i,u_j) = 0 \ , \ i+j > 2p+1,\ i+j < 2p-1 \ ,$$

$$f(u_i,u_{2p-1-i}) = (-1)^i \frac{(2p-1)!}{i!(2p-1-i)!}x \ , \text{ avec la convention } (-1)^0 = 0! = 1 \ ,$$

$$f(u_i,u_{2p-i}) = (-1)^{i+1} \frac{(2p-1)!}{(2p-i)!}(p-i)h \ ,$$

$$f(u_o,u_{2p+1}) = 0 \ ,$$

$$f(u_i,u_{2p+1-i}) = (-1)^i \frac{(2p-1)!}{(i-1)!(2p-i)!}y \ ,$$

et

$$\dim \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda}R,R) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim R \equiv 0,\ 1,\ 2 \pmod 4 \ , \\ 1 & \text{si } \dim R \equiv 3 \pmod 4 \ , \end{cases}$$

avec, dans le second cas, comme générateur l'application bilinéaire alternée définie par les formules

$$h(u_i,u_j) = a_{ij}u_{i+j-p},\ p = 2p'+1,\ \dim R = 4p'+3\ ,$$

$$a_{ij} = (-1)^i \binom{p}{i}\ ,$$

$$(3p+1-i-j)a_{ij} = (2p+1-i)a_{i-1,j} + (2p+1-j)a_{i,j-1}\ .$$

D'autre part, si $\dim M = 2p+1$, $p \geqslant 3$, la flèche

$$\mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda}R, sl(2)) \to \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda}R, R)$$

est injective, comme on le voit en vérifiant que l'image g de f qui est donnée par la formule

$$g(u,v,w) = \sum_{\sigma(u,v,w)} u * f(v,w),\quad u,v,w, \in R\ ,$$

n'est pas nulle (on a, en effet, $g(u_o,u_1,u_{2p}) = (2-p)u_1$) .

On a donc déjà démontré, grâce à la suite exacte δ', (i) et (ii) (sauf dans les quatre cas particuliers). Pour la partie (iii) l'injectivité de Θ se voit de la façon suivante. A $h \in \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda}R, R)$, on associe $h_1 \in Z^2(L,L)$ défini par les formules

$$h_1|\overset{2}{\Lambda}R = h,\ h_1|R \otimes sl(2) = 0,\ h_1|\overset{2}{\Lambda}\, sl(2) = 0\ .$$

L'image $\Theta(\bar{h}_1)$ a alors pour représentant $\tilde{\Theta}(h_1) \in Z^3(L,L)$ défini par

$$\tilde{\Theta}(h_1)(l_1,l_2,l_3) = \sum_{\sigma(l_1,l_2,l_3)} h_1(l_1,h_1(l_2,l_3)),\ l_1,l_2,l_3 \in L\ .$$

Soit $k = \tilde{\Theta}(h_1)|\overset{3}{\Lambda}R$. Il suffit de remarquer l'indépendance linéaire des applications g et k (ce qui se voit sur les transformés de (u_o,u_1,u_{2p}) et (u_o,u_3,u_{2p}) ; attention avec le couple (u_o,u_1,u_{2p}), $(u_o u_2 u_{2p})$ cela ne marche pas !) et d'utiliser encore δ' pour terminer.

Traitons maintenant les cas particuliers.

Dim R = 3 . Alors on a

$$\mathrm{Hom}_{sl(2)}(R, sl(2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda} R, R) ,$$

$$\mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} R, sl(2)) = \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} R, R) = 0 ,$$

et on finit en utilisant δ' .

Dim R = 5 . C'est le cas le plus désagréable. On a

$$\mathrm{Hom}_{sl(2)}(R, sl(2)) = \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} R, R) = 0$$

et la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} R, sl(2)) \to \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{4}{\Lambda} R, R) .$$

On termine comme précédemment.

Dim R = 7,11 . Alors

$$\mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} R, sl(2)) = 0 ,$$

$$\dim \mathrm{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} R, R) = 1 .$$

On laisse au lecteur le soin de deviner la fin de la démonstration.

2. SUR LE GROUPE DE POINCARE.

Dans [19] on s'est intéressé au problème des variations du groupe de Poincaré (groupe des déplacements de l'espace-temps ou produit semi-direct du groupe de Lorentz et du groupe des translations de $\mathbb{R}^4$). On montre que le sous-groupe fermé D du fibré trivial $GL_5(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ dont les fibres sont

i. Le groupe des automorphismes de la forme quadratique

$$\lambda(x^2+y^2+z^2-t^2)-u^2$$

au-dessus de $\mathbb{R} - \{0\}$,

ii. Le groupe de Poincaré au-dessus de zéro

en constitue une solution verselle (universelle à un choix près). L'idée de la démonstration est la suivante. On commence par résoudre le même problème avec le

fibré en algèbres de Lie, $\mathcal{G}_x$, tangent aux fibres. Il est localement trivial comme fibré vectoriel et la fibre en un point x_o de la base est isomorphe à l'algèbre de Lie L du groupe de Poincaré. Sur un voisinage de x_o le fibré vectoriel est trivial et on peut donc choisir une famille de sections convenables qui constituent dans chaque fibre une base de l'espace vectoriel. On constate alors ([19], 2,b) que les constantes de structure des algèbres de Lie dans les fibres s'expriment simplement, dans un voisinage U de x , en fonction d'un paramètre $\Lambda : U \to \mathbb{R}$. On cherche alors une représentation fidèle

$$(\mathcal{G}_x)_{x\in U} \xrightarrow{\rho_x} gl_n(\mathbb{R}) \times U$$

de façon à identifier $(\mathcal{G}_x)_{x\in U}$ à un sous-fibré du fibré trivial $gl_n(\mathbb{R}) \times U$, puis, avec l'application exponentielle, on détermine un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{R}) \times U$ dont le fibré tangent aux fibres soit l'image de ρ_x . Or on connait une représentation linéaire fidèle $\rho : L \to gl_5(\mathbb{R})$ de l'algèbre de Lie L ; c'est celle qui est induite par l'opération du groupe de Lorentz sur $\mathbb{R}^4$. Considérons alors le point rationnel $(L, gl_5(\mathbb{R}), \rho)$ du schéma $\mathcal{M}_{10, gl_5(\mathbb{R})}$. C'est un point lisse d'après le corollaire qui suit. On peut donc, localement, relever le morphisme ρ . On obtient ainsi un sous-fibré de $gl_5(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ que l'on vérifie être le fibré tangent aux fibres de D .

Remarque. Le problème du relèvement d'un fibré en algèbres de Lie en un fibré en groupes de Lie a été étudié par A. Douady et M. Lazard dans [4] . Une des questions laissées en suspens est celle de l'existence, dans le cas analytique, d'un fibré en groupes dont l'espace des fibres soit séparé. L'exemple que nous proposons avec le groupe de Poincaré réalise cette condition. Et la méthode que nous employons (relèvement d'une représentation linéaire) est celle de A. Douady pour son exemple.

PROPOSITION 2. On a

$$\dim H^1(L,L) = \dim H^2(L,L) = 1,\ H^3(L,L) = H^2(L,gl_5) = 0 .$$

COROLLAIRE. Le schéma $\mathcal{M}_{10,gl_5(\mathbb{R})}$ est lisse au point $(L,gl_5\mathbb{R},\rho)$.

Pour le calcul des groupes de cohomologie de L, à valeurs dans le module adjoint, on utilise encore la suite exacte δ de la partie précédente, associée à la suite exacte

$$0 \to R \to L \to S \to 0$$

où R est le radical de L . Rappelons que R est abélien, de dimension 4 et irréductible pour la structure de S-module. On a la suite exacte

$$\begin{aligned}\delta''.\quad 0 &\to \mathrm{Hom}_S(R,R) \to H^1(L,L) \to \mathrm{Hom}_S(R,S) \to \mathrm{Hom}_S(\textstyle\bigwedge^2 R,R)\\ &\to H^2(L,L) \to \mathrm{Hom}_S(\textstyle\bigwedge^2 R,S) \to \mathrm{Hom}_S(\textstyle\bigwedge^3 R,R) \to H^3(L,L)\\ &\to \mathrm{Hom}_S(\textstyle\bigwedge^3 R,S) .\end{aligned}$$

Pour les calculs des différents termes de la suite δ'' nous utiliserons la base $\{t_i,\ i = 1,\dots,4\}$ de R et $\{y_i,\ i = 1,\dots,6\}$ de S données dans [19] . Le crochet de L est donné par le tableau suivant

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	t_1	t_2	t_3	t_4
y_1	0	y_3	$-y_2$	0	y_6	$-y_5$	0	t_3	$-t_2$	0
y_2		0	y_1	$-y_6$	0	y_4	$-t_3$	0	t_1	0
y_3			0	y_5	$-y_4$	0	t_2	$-t_1$	0	0
y_4				0	$-y_3$	y_2	t_4	0	0	t_1
y_5					0	$-y_1$	0	t_4	0	t_2
y_6						0	0	0	t_4	t_3

On a immédiatement, puisque R, $\bigwedge^2 R$ et S sont trois S-modules irréductibles (prendre les transformés de t, Λt_2 pour se rendre compte de l'irréductibilité

de $\overset{2}{\Lambda}R$; S est irréductible sur R),

$$\mathrm{Hom}_S(R,S) = \mathrm{Hom}_S(\overset{2}{\Lambda}R,R) = \mathrm{Hom}_S(\overset{3}{\Lambda}R,S) = 0 .$$

On vérifie directement que

$$\dim \mathrm{Hom}_S(\overset{2}{\Lambda}R,R) = 2 ,$$

une base étant donnée par les applications bilinéaires alternées définies par

$$t_1 \Lambda t_2 \mapsto y_3 \text{ (resp. } y_6) \qquad t_2 \Lambda t_3 \mapsto y_1 \text{ (resp. } y_4)$$

$$t_1 \Lambda t_3 \mapsto -y_2 \text{ (resp. } -y_5) \qquad t_2 \Lambda t_4 \mapsto y_5 \text{ (resp. } -y_2)$$

$$t_1 \Lambda t_4 \mapsto y_4 \text{ (resp. } -y_1) \qquad t_3 \Lambda t_4 \mapsto y_6 \text{ (resp. } -y_3) .$$

De la même façon on montre que

$$\dim_S(\overset{3}{\Lambda}R,R) = 1$$

un générateur étant donné par l'application trilinéaire alterné h définie par

$$t_1 \Lambda t_2 \Lambda t_3 \mapsto t_4 ,$$

$$t_1 \Lambda t_2 \Lambda t_4 \mapsto t_3 ,$$

$$t_1 \Lambda t_3 \Lambda t_4 \mapsto -t_2 ,$$

$$t_2 \Lambda t_3 \Lambda t_4 \mapsto t_1 .$$

Quant à la flèche $\mathrm{Hom}_S(\overset{2}{\Lambda}R,S) \to \mathrm{Hom}_S(\overset{3}{\Lambda}R,R)$ elle est injective comme le montre le calcul de la différentielle de g ($dg = 3h$). La suite δ'' donne alors

$$\dim H^1(L,L) = \dim H^2(L,L) = 1, \quad H^3(L,L) = 0 .$$

Le calcul de $H^2(L,gl_5)$ est un peu plus long. Revenons à la formule α de Hochschild-Serre. Avec les mêmes notations on a

$$H^2(M,V) \simeq H^2(N,V)^S .$$

On a aussi

$$H^2(N,V)^S = \{\bar{f}, f \in Z^2(N,V)^S\} .$$

En effet soit $f \in Z^2(N,V)$ tel que $\bar{f} \in H^2(N,V)^S$. On a alors

$$s * f = d\varphi_s, \quad \varphi \in \mathrm{Hom}_k(S, \mathrm{Hom}_k(N,V)) .$$

Mais la flèche $s \mapsto s * f$ appartient à $B^1(S, \mathrm{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda}N,V))$. On a donc $d\varphi \in B^1(S, B^2(\overset{2}{\Lambda}N,V))$. Comme on a la surjection

$$\mathrm{Hom}_k(N,V) \to B^2(N,V)$$

on en déduit la surjection

$$B^1(S, \mathrm{Hom}_k(N,V)) \to B^1(S, B^2(N,V)) .$$

Il existe donc $\theta \in B^1(S, \mathrm{Hom}_k(N,V))$ vérifiant $d\varphi = d\theta$. Mais

$$\theta_s = s * \omega , \ \omega \in \mathrm{Hom}_k(N,V) .$$

d'où

$$s * f = s * d\omega .$$

Dans notre cas particulier il suffit donc de déterminer les deux-cocycles de R, à valeurs dans gl_5 qui sont invariants par S . L'opération de L sur $W = \mathbb{C}^5$ est donnée par la formule

$$(r+s) * (v,\lambda) = s * v + \lambda r , \ v \in \mathbb{C}^4 \simeq R, \ \lambda \in \mathbb{C} , \ r \in R, \ s \in S .$$

Soient e_i, $i = 1,2,3,4$ la base de $\mathbb{C}^4$ associée à celle de R , $e_5 = (0,1)$ et f_i, $i = 1,\ldots,5$ la base duale. Les opérations de L sur W et W* sont données par le tableau suivant et on en déduit l'opération de L sur $W \otimes W^* \simeq gl_5(\mathbb{C})$.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
y_1	0	e_3	$-e_2$	0	0	0	f_3	$-f_2$	0	0
y_2	$-e_3$	0	e_1	0	0	$-f_3$	0	f_1	0	0
y_3	e_2	$-e_1$	0	0	0	f_2	$-f_1$	0	0	0
y_4	e_4	0	0	e_1	0	f_4	0	0	$-f_1$	0
y_5	0	e_4	0	e_2	0	0	$-f_4$	0	$-f_2$	0
y_6	0	0	e_4	e_3	0	0	0	$-f_4$	$-f_3$	0
t_1	0	0	0	0	e_1	$-f_5$	0	0	0	0
t_2	0	0	0	0	e_2	0	$-f_5$	0	0	0
t_3	0	0	0	0	e_3	0	0	$-f_5$	0	0
t_4	0	0	0	0	e_4	0	0	0	$-f_5$	0

On constate alors que

$$\dim Z^2(R,gl_5(\mathbb{C}))^S = 1$$

et qu'une base en est donnée par l'application φ , bilinéaire et alternée définie par

$$t_1 \wedge t_2 \mapsto e_1 \otimes f_2 - e_2 \otimes f_1 ,$$

$$t_1 \wedge t_3 \mapsto e_1 \otimes f_3 - e_3 \otimes f_1 ,$$

$$t_1 \wedge t_4 \mapsto -(e_1 \otimes f_4 + e_4 \otimes f_1)$$

$$t_2 \wedge t_4 \mapsto -(e_2 \otimes f_4 + e_4 \otimes f_2)$$

$$t_2 \wedge t_3 \mapsto e_2 \otimes f_3 - e_3 \otimes f_2$$

$$t_3 \wedge t_4 \mapsto -(e_3 \otimes f_4 + e_4 \otimes f_3) .$$

Mais ce cycle est aussi un bord. On a en effet $\varphi = d\psi$ avec

$$\psi | S = 0$$

$$\psi(t_i) = e_5 \otimes f_i \ .$$

Ce qui termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.A. BUCHSBAUM. Satellites and universal functors.
Ann. of Math (1960).

[2] P. CARTIER. Effacement dans la cohomologie des algèbres de Lie.
Séminaire Bourbaki (1955).

[3] M. DEMAZURE et P. GABRIEL. Groupes algébriques (tome 1). Masson (1969).

[4] A. DOUADY et M. LAZARD. Espace fibrés en algèbres de Lie et en groupes.
Inv. Math. (1966).

[5] G. HOCHSCHILD. Cohomologie of restricted Lie algebras.
Am . Journ. of Math. (1954).

[6] G. HOCHSCHILD. Lie algebras kernels and cohomology.
Am. Journ. of Math. (1954).

[7] G. HOCHSCHILD. Cohomology-classes of finite type and finite dimensionnal kernels for Lie algebras.
Am. Journ. of Math. (1954).

[8] G. HOCHSCHILD et J.P. SERRE. Cohomology of Lie algebras.
Ann. of Math. (1953).

[9] L. ILLUSIE. Complexe cotangent et déformations I.
Lectures Notes of Math. Springer (1971).

[10] K. IWASAWA. On the representation of Lie algebras.
Japan Journ. of Math. (1948).

[11] JACOBSON. Lie algebras.
New York Interscience (1962).

[12] J.L. KOSZUL. Sur les modules de représentations des algèbres de Lie résolubles. Am. Journ. of Math (1954).

[13] S. MAC LANE. Homology. Springer (1963).

[14] M. MORI. On the three dimensionnal cohomology group of Lie algebras.
Journ. of the Math. Soc. of Japan (1953).

[15] D. MUMFORD. Introduction to algebraic geometry.
Edition sauvage.

[16] A. NIJENHUIS et R.W. RICHARDSON. Deformation of Lie algebra structure. Journ. of Math. and Mech. (1967).

[17] G. RAUCH. Remarque sur les constantes de structure des $\mathbb{C}$-algèbres de Lie de dimension finie. Comptes rendus de l'Acad. des Sciences (1968).

[18] G. RAUCH. Variation d'algèbres de Lie nilpotentes. Comptes rendus de l'Acad. des Sciences (1969).

[19] G. RAUCH. Sur les variations du groupe de Poincaré. Journ. de Math. pures et appliquées (1971).

[20] G. RAUCH. Effacement et déformation. Ann. de l'Institut Fourier (1972).

[21] R.W. RICHARDSON. The rigidity of semi-direct products of Lie algebras. Pacif. Journ. of Math. (1967).

[22] D.S. RIM. Deformation of transitive Lie algebras. Ann. of Math. (1966).

[23] Séminaire des Assistants de Strasbourg. Dirigé par M. DEMAZURE, P. GABRIEL et M. ZISMAN (1964-1965).

[24] Séminaire Sophus Lie (1954-1955).

[25] J.P. SERRE. Algèbres de Lie semi-simples complexes. Benjamin (1966).

[26] M. VERGNE. Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. Bull. de la Soc. Math. de France (1970).

[27] O. YONEDA. On the homology theory of modules. Journ. Fac. Sc. Tokyo (1954).